

Számítástudomány gyakorlat

Péntek 08:30-10:00, LD 4-713

4. feladatsor

1. Egy láthatatlan bolha (vagy szöcske/nyuszi/kenguru/elefánt/bálna) ugrál az egészeken. Kezdetben az origóból indul, és egyenletesen halad, mindig k méretűt ugrik, de k -t nem ismerjük. Minden ugrása után rámutathatunk egy számra, és ha ott van, akkor nyerünk. Mutasd meg, hogy tudunk nyerni, ha

- a) k pozitív,
- b) k lehet negatív is (de konzisztensen mindig vagy csak pozitív, vagy csak negatív),
- c) ha azt se tudjuk, hogy honnan indul,
- d) ha a számegyenes helyett a négyzetrácson ugrál (valamilyen fix egész irányvektor mentén).

* Mi a helyzet, ha egész számok helyett valósokkal kérdezzük ugyanezt, de a bolha kiterjedése nem nulla és elég bármelyik pontjára rámutatni?

Definíció: Egy f függvény rekurzív, ha létezik Turing-gép, amely minden inputon megáll és a w inputra az outputja $f(w)$. $L \in \mathbf{R}$ „recursive”, vagyis az L nyelv rekurzív, ha létezik Turing-gép, ami minden inputon megáll és ha $w \in L$, akkor 1-et ad ki, ha pedig $w \notin L$, akkor 0-t (L indikátorfüggvénye).

Definíció: $L \in \mathbf{RE}$ „recursive enumerable”, vagyis az L nyelv rekurzívan felsorolható, ha vagy $L = \emptyset$, vagy létezik f rekurzív függvény, hogy $L = \text{Im}(f)$. $L \in \mathbf{co-RE}$ „complement recursive enumerable”, vagyis az L nyelv co-rekurzívan felsorolható, ha $\bar{L} \in \mathbf{RE}$, ahol $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$.

Volt előadáson: $L \in \mathbf{RE}$ pontosan akkor, ha létezik Turing-gép, amely pontosan az L -beli szavakra áll meg. (Következmény: ha L rekurzív, akkor rekurzívan felsorolható is.)

Volt előadáson: $L \in \mathbf{R} \Leftrightarrow L \in \mathbf{RE}$ és $L \in \mathbf{co-RE}$.

2. Mutasd meg, hogy ha L_1 és L_2 rekurzívan felsorolható, akkor $L_1 \cup L_2$ és $L_1 \cap L_2$ is rekurzívan felsorolható. Mi a helyzet $L_1 \setminus L_2$ -vel?

3. Tegyük fel, hogy L rekurzív és $L' \subset L$. Mutasd meg, hogy L' akkor és csak akkor rekurzív, ha rekurzívan felsorolható és $L \setminus L'$ is rekurzívan felsorolható.

4. Ha L rekurzívan felsorolható, de nem rekurzív és $L' \subset L$, akkor lehet-e L' rekurzív?

5. Mutasd meg, hogy rekurzívan felsorolható, de nem rekurzív nyelv létezéséből következik Gödel első nemteljességi tétele, miszerint van olyan állítás, mely se nem bizonyítható, se nem cáfolható (bármely, néhány egyszerű követelménynek eleget tevő, rendszerben).

Definíció: Dominó-probléma: Ki akarjuk parkettázni a síkot egy véges dominó-készlettel, mely tartalmaz egy *Start* elemet, amit muszáj felhasználnunk.

6.^{GY} Eldönthető-e, hogy kiparkettázható-e a sík a készlettel, ha

- a) a dominókat el szabad forgatni 180°-kal?
- b) a dominókat el szabad forgatni a függőleges tengelyük körül?
(Azaz a függőleges tengelyre tükröztöttjük is a készletben van.)
- c) a dominókat el szabad forgatni az *egyik* átlójuk körül?
(Azaz az átlóra tükröztöttjük is a készletben van.)

7.^{GY} Mutasd meg, hogy bármely véges labirintusból ki tudunk jutni (ha van elérhető kijárata).

Mutasd meg, hogy akkor is ki tudunk jutni, ha a labirintus egy véges erősen összefüggő irányított gráf.

A kurzus honlapján (https://gilyen.hu/teaching/Szamtud_2026.html) elérhetőek a (javított) feladatsorok és az órával kapcsolatos egyéb tudnivalók. Csillagos feladatokat csak akkor beszélünk meg ha valaki megoldotta, és elmondja a táblánál. A ^{GY} jezésű feladatokat érdemes egyénileg megoldani, jó otthoni gyakorlásként a zh-ra.