Számítástudomány gyakorlat

Szerda 08:30-10:00, LD 4-713
2. feladatsor

1. Pumpálós lemma: $\forall L$ *reguláris* $\exists n\ \forall z \in L, |z| \geq n\ \exists u, v \neq \emptyset, w:\ z = uvw$ *és* $|uv| \leq n$ *és* $\forall i\ uv^iw \in L$.

2. Döntsük el, hogy az alábbi nyelvek regulárisak-e!
a) prímszámok egyes számrendszerben.
b) négyzetszámok egyes számrendszerben.
c) négyzetszámok kettes számrendszerben.
d)* prímszámok kettes számrendszerben.

3. a) Van-e olyan $S \subset \mathbb{N}$, ami kettes számrendszerben reguláris, de egyesben nem?
b) És fordítva?
c)** És olyan, ami kettesben és hármasban is reguláris, de egyesben nem?

Definíció: (Turing-gép) Egy $T = (k, \Sigma, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma)$ Turing-gépnek $k \in \mathbb{N}$ db szalagja van, a Σ véges ábécé felett van értelmezve és a Γ véges állapothalmazzal rendelkezik, amely tartalmazza a $START$ és a $STOP$ állapotokat ($START \neq STOP$).

α, β, γ: T átmenetfüggvényei az alábbiak szerint:
$\alpha : \Sigma^k \times \Gamma \to \Gamma$
$\beta : \Sigma^k \times \Gamma \to \Sigma^k$
$\gamma : \Sigma^k \times \Gamma \to \{-1, 0, 1\}^k$

T elinduláskor a $START$ állapotban van, STOP állapotban pedig a következők teljesülnek:
$\forall\ b \in \Sigma^k$ esetén $\alpha(b, STOP) = STOP, \beta(b, STOP) = b, \gamma(STOP, b) = (0, \ldots, 0)$.

T inputja az első szalagra írt véges hosszú szó, amely pont az első fej alatt kezdődik, az output pedig az utolsó szalag tartalma akkor, amikor $STOP$ állapotba kerül a gép.

4. Készíts olyan Turing-gépet, ami a bemenetként kapott $x_1x_2 \ldots x_m$ sorozatot
a) megkétszerezi ($x_1x_2 \ldots x_mx_1x_2 \ldots x_m$).
b) megfordítja ($x_mx_{m-1} \ldots x_1$),
c) betűnként megkétszerezi ($x_1x_1x_2x_2 \ldots x_mx_m$).

5. Konstruáljunk olyan Turing-gépet, ami
a) az n hosszú, csupa 1-esből álló bemenetre n kettes számrendszerbeli alakját adja vissza,
b) ha a bemenet az n szám bináris alakja, akkor n darab 1-est ír ki (különben azt, hogy „*hibás bemenet*”).

6. Tegyük fel, hogy van két Turing-gépünk, melyek az f illetve g függvényt számolják ki. Konstruáljunk olyan Turing-gépet, mely az $f \circ g$ függvényt számolja ki.

7. a) Konstruáljunk olyan Turing-gépet, mely az a^nb^n alakú szavakra $O(n \log n)$ lépésben kiírja, hogy „*igen*”, más szavakra végtelen sokáig fut.
b)* Mutassuk meg, hogy ez egyszalagos gépen $o(n \log n)$ lépésben nem lehetséges.

8.[HF] Adj meg egy Turing-gépet, ami bármely x bemenetre pontosan $2^{|x|}$ lépést tesz meg.
Aki akarja, annak Verseny: Ki tudja kevesebb állapottal megcsinálni?

A kurzus honlapján (`http://gilyen.hu/teaching/Szamtud_2024Fall.html`) elérhetőek a (javított) feladatsorok és az órával kapcsolatos egyéb tudnivalók. A házi- és csillagos feladatokat a következő gyakorlat előtt tudjátok beadni, illetve csillagos feladatokat egészen addig amíg azokat „le nem lőjük” előadáson vagy gyakorlaton.

Definíció: Kvantumos véges automata: $K = (\mathcal{H}, \Sigma, \mathcal{U}(\Sigma), \psi_0, \Pi)$ *kvantumos véges automatának* $\mathcal{H}$ (véges dimenziós) komplex euklideszi vektortér egységvektorai az állapothalmaza, Σ ábécé felett van értelmezve, $\mathcal{U}(\Sigma)$ az átmeneti függvénye (valamilyen x betűt olvasva az $\mathcal{U}(x)$ unitér transzformációt alkalmazzuk a jelenlegi állapotra), $\psi_0 \in \mathcal{H}$ a kezdőállapota, Π az elfogadott végállapotok alterére vett merőleges vetítés. A végállapotban az elfogadás valószínűsége a Π-vel vett vetület hosszának a négyzete. Ha K minden L-beli szót legalább $\frac{2}{3}$ valószínűséggel elfogad, és minden más szót legfeljebb $\frac{1}{3}$ valószínűséggel fogad el, akkor azt mondjuk, hogy K felismeri az L nyelvet. Részletesebben lásd: `https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_finite_automaton#Measure-once_automata`

9. a)* Mutasd meg, hogy a prímszámok egyes számrendszerben felismerhetőek egy $\dim(\mathcal{H}) = \mathcal{O}(\log(p))$ dimenziós belső állapotterű kvantumos véges automtával.
b)** Mutasd meg, hogy egy n-dimenziós állapotterű kvantumos véges autamata által felismert L nyelv felimerhető egy $|Q| = 2^{\mathcal{O}(n)}$ belső állapotú determinisztikus véges autmatával.