

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar

# Egy qubit-es káosz és kapcsolata a komplex dinamikus rendszerekhez



**Készítette:**

Gilyén András  
III. Matematikus MSc

**Témavezető:**

Kiss Tamás  
PhD, tudományos főmunkatárs  
MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont

Budapest, 2014 május 4.

**Kivonat.**

A dolgozatban egy olyan kvantumfizikai folyamat elemzésével foglalkozunk amiben valódi káosz jelenik meg. Ez egy szokatlan jelenség, ugyanis az unitér időfejlődés legtöbbször nem enged meg kaotikus viselkedést.

A konkrét elrendezést annak idején egy kvantum-információelméleti állapot tisztító protokoll ihlette. A diszkrét idejű leképezésnek három fázisa van: az első fázisban párokba rendezzük az azonosan preparált qubit sokaság qubitjeit és páronként összefonjuk őket egy CNOT kapu alkalmazásával. A második fázisban megmérjük a párok második elemét a szokásos számítási bázisban ( $|0\rangle, |1\rangle$ ) majd eldobjuk a sokaságból a megmért a qubiteket, illetve azokat is amelyek párján a mérési eredmény 1 lett. A harmadik fázisban egy előre meghatározott unitér operátort alkalmazunk a megtartott qubit sokaság minden elemére. A három fázis együtt egy determinisztikus, nemlineáris leképezést eredményez a qubitek állapotterén. (A megtartott qubitek állapotai megegyeznek.)

Az így kapott leképezést a Bloch-gömbi reprezentáció segítségével értelmezhetjük mint egy racionális törtfüggvényt a Riemann-gömbön. Ezen kapcsolat a komplex dinamikus rendszerekkel egy nagyon gazdag eszköztárat biztosít a leképezés vizsgálatára. A dolgozat gerincét az adja, hogy ennek a matematikai eszköztárnak a segítségével elemezzük a leképezést és interpretáljuk a matematikai eredményeket kvantumfizikai nézőpontból. A valódi káosz megjelenését pozitív Ljapunov-exponens megjelenésével sikerült igazolni a leképezés paramétereinek egy tág halmazán. A megjelenő fraktálok dimenziójának becslésére is bemutatunk egy módszert és végül a folyamat egy általánosított verzióját is felvázoljuk a dolgozat végén.

## Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. A dolgozat felépítése és a főbb gondolatmenetek nagyívű vázlata . . . . .	2
<b>2. Mérés és posztszelekció - nemlineáris determinisztikus dinamika</b>	<b>3</b>
2.1. Híd a komplex dinamikus rendszerekhez . . . . .	4
<b>3. Szótár a kvantum rendszer és a komplex dinamikus rendszerek között</b>	<b>4</b>
3.1. Definíciók és fontos eredmények a racionális törtfüggvényekről . . . . .	5
<b>4. A Bloch-gömb és Riemann-gömb kapcsolata</b>	<b>8</b>
4.1. Bloch-gömb metrikával . . . . .	8
4.2. Bloch-gömb konform struktúrával . . . . .	9
4.3. Kapcsolat a két strukturális kiterjesztés között . . . . .	10
4.4. A Riemann-gömb automorfizmusai . . . . .	11
<b>5. Fizikailag illetve dinamikailag ekvivalens leképezések</b>	<b>11</b>
5.1. dinamikailag ekvivalens leképezések . . . . .	12
<b>6. Általános kvadratikus törtfüggvények</b>	<b>13</b>
6.1. Normálformák és konform konjugálási invariánsok . . . . .	14
<b>7. Hiperbolikus leképezések és pozitív Ljapunov-exponens megjelenése</b>	<b>15</b>
7.1. Hiperbolikus Julia-halmaz Ljapunov-exponense pozitív . . . . .	16
7.2. Pozitív alsó Ljapunov-exponens létezéséből következik a hiperbolikusság .	16
7.3. Hiperbolikus és pozitív Ljapunov-exponensű leképezések jellemzése . . .	18
<b>8. Négyféle hiperbolikus dinamika</b>	<b>19</b>
<b>9. Szimmetriák és alkalmazásaik dinamikai vizsgálatokra</b>	<b>23</b>
9.1. $p \in \mathbb{R}$ hiperbolikus komponensei, és az őket elválasztó paraméter értékek magyarázata . . . . .	23
9.2. A $p = 0$ paraméter körül lévő hiperbolikus komponens . . . . .	26
9.3. A valós tengelyen megjelenő hiperbolikus komponensek központi paraméterei . . . . .	28
<b>10.A Julia-halmaz „sűrűsége” - a Hausdorff-dimenzió</b>	<b>28</b>
<b>11.Káosz a teljes állapotterén - a Riemann-gömb mint Julia-halmaz</b>	<b>30</b>
11.1. Teljesen kaotikus paraméterek $i$ közelében . . . . .	32
<b>12.A folyamat kísérleti megvalósításának lehetőségei</b>	<b>34</b>

<b>13. Általánosított protokoll tetszőleges kvadratikus racionális törtfüggvény által leírt dinamika megvalósítására</b>	<b>35</b>
13.1. A sikeres 0 mérés valószínűsége . . . . .	38
13.2. Magasabb fokú racionális törtfüggvények . . . . .	39
<b>14. Összefoglalás</b>	<b>39</b>

## 1. Bevezetés

A kvantumfizika vitathatatlanul a legsikeresebb elmélet a mikrovilág leírására - egyelőre egyetlen jóslata sem mondott ellen a kísérleti eredményeknek. A kvantummechanika és a speciális relativitáselmélet egyesítéséből származó részecskefizikai standard modell pedig épp napjainkban vált valamilyen értelemben teljessé a Higgs-bozon létezésének kísérleti igazolása révén.

Ezek a látványos sikerek azonban távolról sem jelentik azt, hogy mindent értenénk a kvantumfizika kapcsán. Az egyik legnagyobb kérdés, hogy a mikrovilágban tapasztalható különös jelenségek hogyan alakulnak át klasszikus viselkedéssé nagy részecskeszám esetén. A klasszikus világban sohasem tapasztaljuk, hogy egy tárgy egyszerre két helyen is legyen félig-meddig, noha a fizikai állapotok szuperpozíciójának elve a kvantummechanika egyik alappillére. A szuperpozíció elvével szorosan összefüggő alapelv még a lineáris (unitér) időfejlődés. Ez is látszólag ellentmond a hétköznapi tapasztalatunknak, hiszen a legtöbb klasszikus rendszer legfeljebb közelítőleg mutat lineáris viselkedést, de nem ritka a kaotikus viselkedés sem.

Nem véletlen hát, hogy a kvantumfizikai káosz vizsgálatának komoly irodalma van. Azonban a legtöbb szerző a kvantum-káosz alatt klasszikusan kaotikus rendszerek kvantált verziójának viselkedését érti [1]. Ezek a rendszerek azonban valójában nem mutatnak kaotikus dinamikát - például hiányzik az exponenciális érzékenység a kezdeti feltételekre. Az általunk vizsgált rendszer azonban valódi kaotikus dinamikát mutat. Mi a valódi káosz alatt a rendszer viselkedésének teljes megjósolhatatlanságát értjük majd, vagyis hogy akármilyen kicsi pontatlansággal is ismerjük a kiinduló állapotot, egy megfelelő (véges) idő elteltével bármely állapotba eljuthat a rendszer. Ez egy nagyon erős káosz fogalom, ami jól illeszkedik az általunk vizsgált kompakt állapottérrel rendelkező rendszerhez.

A folyamat az unitér időfejlődés béklyójából mérések beépítésével és a mérési eredménynek a rendszerbe való visszatáplálásával szabadul ki. Így végül is nem lineáris dinamikát kapunk egy egyre zsugorodó részsokaság homogén állapotterén. Ebben a rendszerben már megjelenik a valódi káosz, sőt bizonyos eseteken a kezdeti állapotra való explicit exponenciális érzékenység is. Bár a mi káoszfogalmunkat nem ez ragadja meg a legjobban, a dolgozatban majd kitérünk azokra az esetekre is, ahol pozitív Ljapunov-exponens létezése bizonyítható.

### 1.1. A dolgozat felépítése és a főbb gondolatmenetek nagyívű vázlata

A 2. szakaszban tárgyaljuk a dolgozat kiindulópontját jelentő fizikai folyamatot és felvázoljuk a kapcsolódó matematikai formalizmust.

A 3. szakaszban a komplex dinamikus rendszerek elméletének általunk használt legfontosabb definícióit és eredményeit tárgyaljuk, és egyfajta szótár felépítésébe kezdünk, ami a fizikai rendszer leírására használatos fogalmakat köti össze az absztraktabb matematikai definíciókkal és tételekkel.

A 4. szakaszban a Bloch-gömb és a dinamikai rendszerek elméletében használatos Riemann-gömb kapcsolatát tárgyaljuk, és vizsgáljuk a gömb kétféle „geometriáját”. Másként fogalmazva vizsgáljuk a két struktúra egybevágóságait először külön-külön majd egymáshoz való viszonyuk szempontjából is.

Az 5. szakaszban definiáljuk a Bloch-gömb és a Riemann-gömb iteratív leképezéseinek ekvivalenciaosztályait és ennek révén bevezetjük a fizikailag illetve dinamikailag ekvivalens leképezések fogalmát.

A 6. szakaszban szemügyre vesszük az általános kvadratikus törtfüggvények terét és benne az imént vizsgált ekvivalenciaosztályok elhelyezkedését is. Mindezt azért tesszük, hogy el tudjuk helyezni a fizikai folyamatunk által megvalósított dinamikai rendszereket az általános leképezések között.

A 7. szakaszban tárgyaljuk az egyik fő eredményünket. Megmutatjuk, hogy pontosan azok a kvadratikus racionális törtfüggvények hiperbolikus amelyeknek Ljapunov-exponense pozitív a Julia-halmazon.

A 8. szakaszban a hiperbolikus (avagy a Julia-halmazon pozitív Ljapunov-exponensű) leképezések megjelenését vizsgáljuk, és elvégezzük további még finomabb osztályozását, amiből kiderül hogy igen sokszínű dinamikát fednek le az általunk vizsgált leképezések.

A 9. szakaszban dinamikailag részletesen kielemezzük azt az esetet, amikor az  $U$  unitér transzformációnak egy forgásmátrixot választunk.

A 10. szakaszban a megjelenő fraktálok dimenziójáról értekezünk, és a kiszámítás nehézségeit mutatjuk be. Emellett bemutatok egy összetett számítási módszer sikeres adaptációját, amely bizonyos tartományokban hatékony dimenzió becsléseket tud szolgáltatni. Az általam módosított/átírt program egy a Mandelbrot halmazra kifejlesztett módszert adaptál a mi némileg bonyolultabb fizikai rendszerünk esetében.

A 11. szakaszban a dolgozat másik fő eredményét tárgyaljuk. Találtam egy speciális esetet amikor a dinamika a teljes Bloch-gömbön kaotikus viselkedést mutat, szemben az eddig vizsgált esetekkel, amikor a káosz mindössze egy nullmértékű halmazon volt megfigyelhető.

A 12. szakaszban a fizikai folyamat kísérleti megvalósításának lehetőségeit és a potenciálisan felmerülő kvantumfizikai rendszereket tárgyaljuk röviden.

A 13. szakaszban végül megmutatom, hogy a kiinduláskor vizsgált rendszer sémáját kissé általánosítva tetszőleges kvadratikus racionális törtfüggvény által leírt dinamikai rendszert meg lehet valósítani.

## 2. Mérés és posztszelekció - nemlineáris determinisztikus dinamika

A dolgozatban vizsgált fizikai folyamatot egy kvantuminformatikai protokoll inspirálta. Ez a protokoll a mérés és szelekció által okozott nemlinearitáson alapul [2], amelyet összefonódás tisztítására javasoltak használni [3]. Az eredeti megfontolásokkal összhangban az elrendezésben egy qubit sokaságon fogunk majd dolgozni és a folyamat során bizonyos qubiteket eldobunk. Továbbá a jelen esetben feltesszük, hogy mindegyik qubit azonosan volt preparálva, tehát homogén az állapotuk. Ezt a tulajdonságot végig fenntartjuk majd arra a részsokaságra nézve amivel dolgozunk. A jelen esetben tiszta állapotból indítjuk a rendszert és a posztszelekció következtében végig tiszta állapotban is marad a rendszer. Kévert állapotokra is hasonlóan definiálható a folyamat, ez esetben beszélhetünk állapot tisztításról, de ezzel az esettel ebben a dolgozatban nem foglalkozunk.

A qubiteket először párba állítjuk, majd páronként összefonjuk őket egy CNOT (=  $|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$ ) operátor segítségével. A párok második tagját megmérjük a szokásos számítási ( $|0\rangle, |1\rangle$ ) bázisban majd eldobjuk a sokaságból a megmért a qubiteket, illetve azokat is amelyek párján a mérési eredmény 1 lett:

$$\begin{array}{rcccl}
 \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle & \text{C} & \alpha^2 |0\rangle |0\rangle + \alpha\beta |0\rangle |1\rangle & 0 \rightarrow & N \cdot (\alpha^2 |0\rangle + \beta^2 |1\rangle) \otimes |0\rangle \\
 \otimes & \rightarrow & + & \text{Mérés} & \\
 \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle & \text{NOT} & \beta^2 |1\rangle |0\rangle + \beta\alpha |1\rangle |1\rangle & 1 \rightarrow & \underbrace{1/\sqrt{2} \cdot (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle}_{\text{Ezt eldobjuk}} \quad (1)
 \end{array}$$

A megmért és eldobott qubiteket nem tekintve a fenti folyamat röviden így írható le:  $S : \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow N \cdot (\alpha^2 |0\rangle + \beta^2 |1\rangle)$ , ahol  $N$  a normálási tényező. Jelen esetben  $N = 1/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .

Így tehát egy nem lineáris ámde determinisztikus folyamatot kapunk a részsokaságok homogén állapotterén. Ezt a különös dinamikát a mérés és a posztszelekció együttes alkalmazása teszi lehetővé. A mérés után eldobott részecskék bizonyos értelemben nem tartalmaznak információt, hiszen ha a második qubiten 1-et mérünk akkor az első qubit egy ismert állapotba ( $1/\sqrt{2} \cdot (|0\rangle + |1\rangle)$ ) kerül függetlenül a kiinduló állapottól. Tehát bizonyos értelemben minden megmaradó információt a megtartott részsokaságba juttatunk.

Ha csak ezt a folyamatot ismételnénk akkor  $n$  lépés után az állapot  $N \cdot (\alpha^{2n} |0\rangle + \beta^{2n} |1\rangle)$  lenne, ami dinamikai szempontból nem annyira izgalmas. Jóval összetettebb dinamikát kaphatunk azonban, ha minden egyes lépés után még beiktatunk egy lokális unitér transzformációt, amit az összes qubitre alkalmazunk. Tetszőleges egy qubites unitér operátort választhatunk, ugyanakkor a globális fázis irrelevanciája miatt elegendő a speciális unitér operátorokra koncentrálnunk. Egy általános  $SU(2)$  operátor 3 valós paraméterrel kényelmesen paramétrezhető az alábbi módon:

$$U(x, \varphi, \omega) = \begin{bmatrix} \cos(x)e^{-i\omega} & \sin(x)e^{-i\varphi} \\ -\sin(x)e^{i\varphi} & \cos(x)e^{i\omega} \end{bmatrix}$$

A diszkrét idejű folyamatot ezen két operátor iterálása révén definiáljuk. Ha  $|\psi\rangle$  állapotban preparáltuk a részecskéinket, akkor  $n$  lépés után a megtartott részecskék állapota  $(US)^n |\psi\rangle$  lesz. Közben a mérések és a posztszelekció következtében a megtartott részecskék száma exponenciálisan csökkenni fog a lépésszám függvényében.

### 2.1. Híd a komplex dinamikus rendszerekhez

A leképezés iterálása során végig tulajdonképpen csak egy qubites állapotokkal kell foglalkoznunk. Egy qubit állapota általánosan  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  alakban paraméterezhető, ahol  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Továbbá mivel a globális fázis is irreleváns ezért igazából csak  $z = \alpha/\beta$  mennyiség érdekes. Tehát a globális fázist elhanyagolva még tömörebben egy komplex paraméterrel is paraméterezhetjük az állapotokat:  $|\psi\rangle = N(z|0\rangle + |1\rangle)$ , ahol most az  $N$  normálási tényezőbe bele érthetjük a globális fázist is.  $z$  értéke akár  $\infty$  is lehet, ha az állapot a 0-hoz tartozó bázisállapot  $|0\rangle$ . Általánosan tehát  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , ahol  $\hat{\mathbb{C}}$  a Riemann-gömb:  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Ebben a paraméterezésben felírva a leképezéseink egyszerű alakban írhatóak.  $S : N_1((\alpha/\beta)|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow N_2((\alpha^2/\beta^2)|0\rangle + |1\rangle)$  vagyis  $S$  a  $z \rightarrow z^2$  leképezést valósítja meg a Riemann-gömbön. Az unitér operátort is átírhatjuk

$$U : N_1\left(\frac{\alpha}{\beta}|0\rangle + |1\rangle\right) \rightarrow N_2\left(\frac{\alpha\cos(x)e^{-i\omega} + \beta\sin(x)e^{-i\varphi}}{-\alpha\sin(x)e^{i\varphi} + \beta\cos(x)e^{i\omega}}|0\rangle + |1\rangle\right)$$

Ha tovább alakítjuk  $|0\rangle$  együtthatóját akkor egy szebb alakot kapunk:  $\frac{\frac{\alpha}{\beta}e^{-i\omega} + \tan(x)e^{-i\varphi}}{-\frac{\alpha}{\beta}\tan(x)e^{i\varphi} + e^{i\omega}}$  bevezetve a  $p = \tan(x)e^{-i\varphi}$  jelölést végül egy egyszerű lineáris törtfüggvényt kapunk a Riemann-gömbön:

$$U : z \rightarrow \frac{ze^{-i\omega} + p}{-\bar{p}z + e^{i\omega}} \quad (2)$$

Végül az  $S$  és  $U$  kompozíciójaként a  $z \rightarrow \frac{z^2e^{-i\omega} + p}{-\bar{p}z^2 + e^{i\omega}}$  racionális törtfüggvényt kapjuk a Riemann-gömbön. Később látni fogjuk, hogy az  $\omega \in [0, 2\pi]$  paraméter dinamikai és fizikai szempontból is irreleváns, mivel csak a számítási bázis kijelölésének erejéig különböznek. Ezért a dolgozatban csak a  $p$  paraméterre fogunk koncentrálni, és  $f_p$ -vel jelöljük majd a megfelelő leképezést a Riemann-gömbön:

$$f_p : z \rightarrow \frac{z^2 + p}{-\bar{p}z^2 + 1} \quad (3)$$

Kiegészítésként még hozzátesszük, hogy  $\tan(x)$  akár  $\infty$  is lehet. Ez esetben a Riemann-gömbön megvalósuló leképezés  $z \rightarrow \frac{-e^{-2i\varphi}}{z^2}$ , amely dinamikai szempontból mindig ekvivalens az  $1/z^2$  leképezéssel. Röviden erre az esetre is visszatérünk majd.

## 3. Szótár a kvantum rendszer és a komplex dinamikus rendszerek között

Eddig a tárgyalásban lényegében a témavezetőm fizikai folyamatot leíró 2006-os cikkét [4] követtem. Mielőtt azonban áttérnék a leképezés vizsgálatával kapcsolatos saját



eredményeim ismertetésére be kell vezetnem néhány alapvető fogalmat az *egyváltozós komplex dinamikus rendszerek* elméletéből. A matematikai elmélet bemutatása közben egy szótárat is fogok építeni, ami a különböző matematikai fogalmakat a fizikai rendszerben való konkrét megjelenési formájukkal hivatott majd kapcsolatba hozni. A bevezetésben már megmutattuk hogyan reprezentálható a fizikai folyamatunk úgy mint egy *kvadratikus racionális törtfüggvény* a Riemann-gömbön. Összegezvén az eddig leírtakat a szótárunk egyelőre a következő elemeket tartalmazza:

$$\text{a qubitek kvantum állapota} \leftrightarrow z \in \hat{\mathbb{C}} \text{ egy pont a Riemann-gömbön) } \quad (Sz1)$$

$$\text{a folyamat egy lépése (US)} \leftrightarrow f_p \text{ egy alkalmazása } z \rightarrow \frac{z^2+p}{1-\bar{p}\cdot z^2} \quad (Sz2)$$

$$U \text{ releváns szabadsági fokai } (x, \varphi) \leftrightarrow \text{paramétertér} - p \in \mathbb{C} \quad (Sz3)$$

### 3.1. Definíciók és fontos eredmények a racionális törtfüggvényekről

A fő kérdés, amit meg szeretnénk érteni, hogy hosszú távon milyen viselkedést mutatnak az egyes leképezések. A szerencsénk az, hogy ez a kérdés nagyon jól megértett a komplex dinamikus rendszerek elméletében. Ez a nagyon jól kidolgozott elmélet immár csaknem 100 éves múltra tekint vissza. Az elmélet alapjainak lefektetése Pierre Fatou, Gaston Julia és Samuel Lattès francia matematikusok nevéhez köthető.

A matematikai fogalmak néhol eléggé bonyolultak és elvontak. Ez nem véletlen hiszen általánosan már annak az egyszerű kérdésnek a megválaszolása sem triviális, hogy mi alapján definiálhatunk egy pontot stabilnak vagy instabilnak. Az alapján nem osztályozhatjuk, hogy a végtelenbe tart-e vagy sem, hiszen egy kompakt gömbfelületen játszódhatnak le a folyamatok. Az is lehet, hogy egy pont oszcillál, de attól még egy stabil ciklushoz tart. Illetve a deriváltak vizsgálata sem feltétlenül célravezető, mert lehet, hogy az iterálás során keresztül megy a pont egy olyan helyen, ahol 0 a derivált, és ilyen módon a sokadik iteráltjainak deriváltja mindig 0 lesz, mégis a pont valamiféle instabilitást mutat.

A jó matematikai definíciónak a következő bizonyult [18, §2]: Az  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  leképezésre nézve egy  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  pont *reguláris*, ha létezik egy olyan nyílt  $U_z \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  környezete, hogy  $f$  iteráltjainak  $U_z$ -re való megszorításai  $\{f^{on}|_{U_z} : n \in \mathbb{N}\}$  egy *ekvifolytonos családot* alkotnak. (Az  $U$  halmazon értelmezett folytonos függvények egy  $F$  családját akkor hívjuk ekvifolytonosnak, ha  $\forall x_0 \in U \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ , hogy  $d(f(x_0), f(x)) < \epsilon$  teljesül bármely  $f \in F$  és  $x \in U : d(x_0, x) < \delta$  esetén. Megjegyzés: a Riemann-gömbön értelmezett távolságfogalmat a 4. szakaszban definiáljuk akkurátusan.)

A mi esetünkben egy kicsit lehet gyengíteni a fenti definíción. Egy  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  pontot akkor nevezünk  $f$ -re nézve *gyengén Ljapunov-stabilnak*, ha a  $z_0$ -hoz közeli pontok pályái egyenletesen közel maradnak  $z_0$  pályájához  $f$  iterálása során. Formálisan  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ , hogy  $d(z_0, z) < \delta$  esetén  $d(f^{on}(z_0), f^{on}(z)) < \epsilon$  tetszőleges  $n \in \mathbb{N}^+$ -re. Megmutatható, hogy racionális törtfüggvények esetén a regularitás és a gyenge Ljapunov-stabilitás fogalma egybe esik [16, §4].

Hagyományosan a reguláris pontok halmazát *Fatou-halmaznak* hívják és ennek a komplementerét *Julia-halmaznak*. Az első definícióból egyből látható, hogy a Fatou-

halmaz nyílt és a Julia-halmaz zárt, így a Riemann-gömb részhalmazaként *kompakt* is egyben. A második definíció pedig megkönnyíti a Fatou- illetve Julia-halmaz fizikai értelmezését:

”stabil” kezdeti állapotok  $\leftrightarrow$  Fatou-halmaz pontjai (Sz4)

”instabil” kezdeti állapotok  $\leftrightarrow$  Julia-halmaz pontjai (Sz5)

A Julia-halmaz pontjainak gyenge Ljapunov-instabilitásából nem következik egyből az erős exponenciális Ljapunov-instabilitás. Ehhez külön feltételek teljesülésére van szükség, ezt a kérdéskört részletesen tárgyaljuk majd a 7. szakaszban. Addig is az absztrakt fogalmak megértésének elmélyítését segítő megemlítjük, hogy létezik a Julia-halmaz pontjaira egy másik ekvivalens klasszifikáció is [16, §14]. Ez a másik klasszifikáció szintén közel áll a fizikai nézőponthoz, és talán jobban megvilágítja a Julia-halmaz mibenlétét: A Julia-halmaz nem más mint a taszító *periodikus pontok* halmazának lezártja. Az  $n$  különböző pontból álló  $\{z_0, f(z_0), f^{o2}(z_0), \dots, f^{o(n-1)}(z_0)\} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  halmazt egy  $n$  hosszú *periodikus orbitnak* nevezünk, ha  $f^{on}(z_0) = z_0$ , az orbit pontjait pedig periodikus pontoknak nevezzük. Az orbit *nyújtása* (multiplier) a következő mennyiség:  $\lambda = \left. \frac{\partial f^{on}(z)}{\partial z} \right|_{z_0}$ . A periodikus orbit (illetve periodikus pont) *taszító, semleges, vonzó* vagy *szuper vonzó* annak megfelelően, hogy a nyújtás  $|\lambda| > 1$ ,  $|\lambda| = 1$ ,  $|\lambda| < 1$  vagy  $|\lambda| = 0$ . Egy semleges periodikus orbitot *parabolikusnak* hívunk ha  $\lambda$  egy egységgyök.

A Julia-halmaznak sok hasznos tulajdonsága ismert a komplex dinamikus rendszerek elméletből [16]. A teljesség igénye nélkül felsoroljuk a legfontosabbakat (a Julia-halmazt egyszerűen csak  $J$ -vel jelöljük):

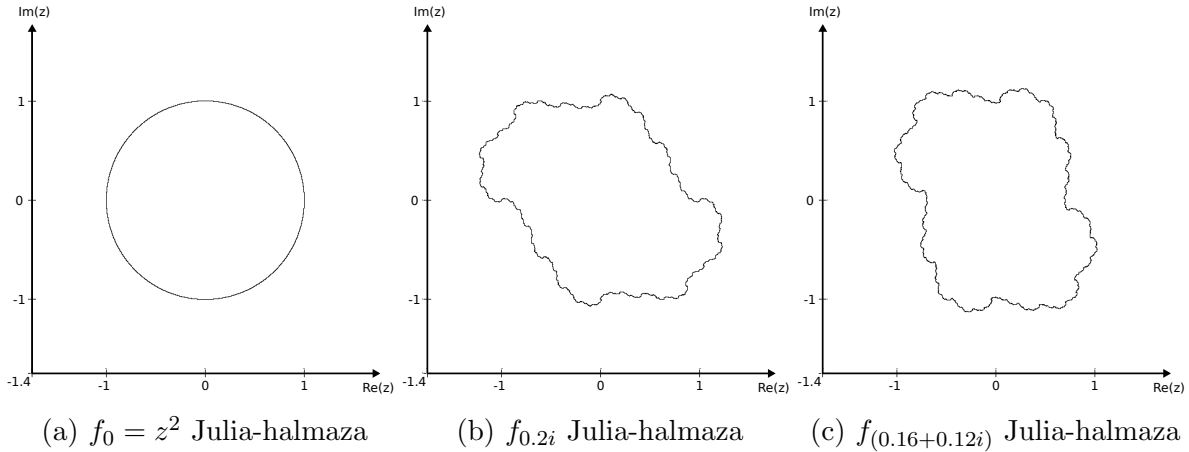
- (i)  $J$  teljesen invariáns  $f$ -re nézve:  $f^{-1}(J) = J = f(J)$
- (ii)  $J$  bármely kis darabja egy idő után *lefed*  $J$ -t:  $\forall U \subseteq \hat{\mathbb{C}}, U$  nyílt,  $U \cap J \neq \emptyset \exists m \in \mathbb{N}$  hogy  $f^{om}(U \cap J) = J$ .
- (iii)  $J$  nem eltűnő: bármely  $f$  racionális törtfüggvényre amelynek foka  $\geq 2$ :  $J_f \neq \emptyset$ .
- (iv) Az *ósképek sűrűek*  $J$ -ben:  $P(z_0) := \cup_{n=1}^{\infty} \{(f^{on})^{-1}(z_0)\}$  ekkor bármely  $z_0 \in J$ -re  $P(z_0)$  lezártja megegyezik  $J$ -vel.

(ii) tulajdonképpen azt mondja ki, hogy a Julia-halmazon valódi káosz jelenik meg, a rendszer teljesen megjósolhatatlan. (iii)-al egybevetve különösen biztató a helyzet. (iv) különösen hasznos a Julia-halmaz *vizualizációja* szempontjából. Itt megjegyezzük még, hogy kvadratikus leképezés esetén bizonyos értelemben gondolhatunk úgy is a Julia-halmazra mint a leképezés két inverz ágából álló iterált függvényrendszer attraktorára.

A Riemann-gömbi globális dinamika meglepően jól klasszifikálható mindössze néhány úgy nevezett *kritikus pont* viselkedésének tükrében. Egy leképezés kritikus pontjai azok, amelyeknél a derivált 0. A mi leképezésünk deriváltjára

$$\frac{\partial f_p(z)}{\partial z} = \frac{2z(1 + |p|^2)}{(1 - \bar{p} \cdot z^2)^2} \quad (4)$$

Ebből egyből látható, hogy a  $\infty$ -t leszámítva a 0 az egyetlen kritikus pont. A derivált végtelenben való kiszámításához  $\hat{\mathbb{C}}$  másik térképét kell elővennünk (lásd a következő



1. ábra. Dinamika kis paraméter értékek esetén: A  $z^2$  leképezés (a) dinamikai szempontból a legegyszerűbb - ez az eset felel meg annak amikor kihagyjuk az unitért transzformációt. Ilyenkor az egységkör belseje a 0-hoz, míg külseje a  $\infty$ -hez konvergál, a körvonal pedig önmagára képződik. A Julia-halmaz a körvonal lesz: minden lépésben bármely ív elem hossza megduplázódik - mutatván a kaotikus dinamikát. Más kisebb paraméter értékek esetén a dinamika hasonló lesz, de a Julia-halmaz egy bonyolult fraktál görbévé alakul - amint az ábrán is látható (b),(c).

szakaszban) - az áttérést a másik általunk használt térképre az  $1/z$  transzformáció valósítja meg. Ennek a térképnek a használatával a leképezésünk új alakot nyer:

$$(1/z) \circ f_p \circ (1/z) = \frac{1}{\frac{(1/z)^2 + p}{-\bar{p}(1/z)^2 + 1}} = \frac{-\bar{p} + z^2}{1 + pz^2} = f_{-\bar{p}}(z) \quad (5)$$

Így aztán

$$\left. \frac{\partial f_p}{\partial z} \right|_{\infty} = \left. \frac{\partial((1/z) \circ f_p \circ (1/z))}{\partial z} \right|_0 = \left. \frac{\partial f_{-\bar{p}}(z)}{\partial z} \right|_0 = 0 \quad (6)$$

Megmutattuk tehát, hogy a  $p$  paraméter értékétől függetlenül a kritikus pontok mindig a 0 és a  $\infty$  lesznek. Ezek a pontok fizikailag a  $|0\rangle, |1\rangle$  bázisállapotoknak felelnek meg.

a számítási bázis elemei:  $|0\rangle, |1\rangle \leftrightarrow$  a leképezés kritikus pontjai  $0, \infty$  (Sz6)

A kritikus pontok konvergencia-tulajdonságaiból mint említettük sok dolgot ki lehet olvasni. Például ha mind a két kritikus pont egy-egy vonzó periodikus orbithoz tart, akkor pozitív Ljapunov-exponens létezésére tudunk következtetni. A részleteket majd a 7. szakaszban tárgyaljuk. Mindenesetre a paraméterter ábrázolása a kritikus pontok szemszögéből mindenképpen sok információt ad l. 2. ábra. Tulajdonképpen a Mandelbrot halmaz is egy kritikus pont ábra. Ha az egy komplex paraméteres  $\{z^2 + c \mid c \in \mathbb{C}\}$  leképezés sereget nézzük, akkor kiderül, hogy a kritikus pontok szintén a 0 és a  $\infty$  lesznek. A  $\infty$  ebben az esetben mindig egyben fixpont is lesz, ezért a 0 viselkedése az igazán érdekes. Ha a 0 konvergenciáját ábrázoljuk a  $c$  paraméter függvényében, akkor

megkapjuk a Mandelbrot halmazt: A  $c$  paraméter érték akkor tartozik a Mandelbrot halmazhoz, ha 0-nak a  $z^2 + c$  leképezés által vett iteráltjai nem tartanak a  $\infty$ -hez.

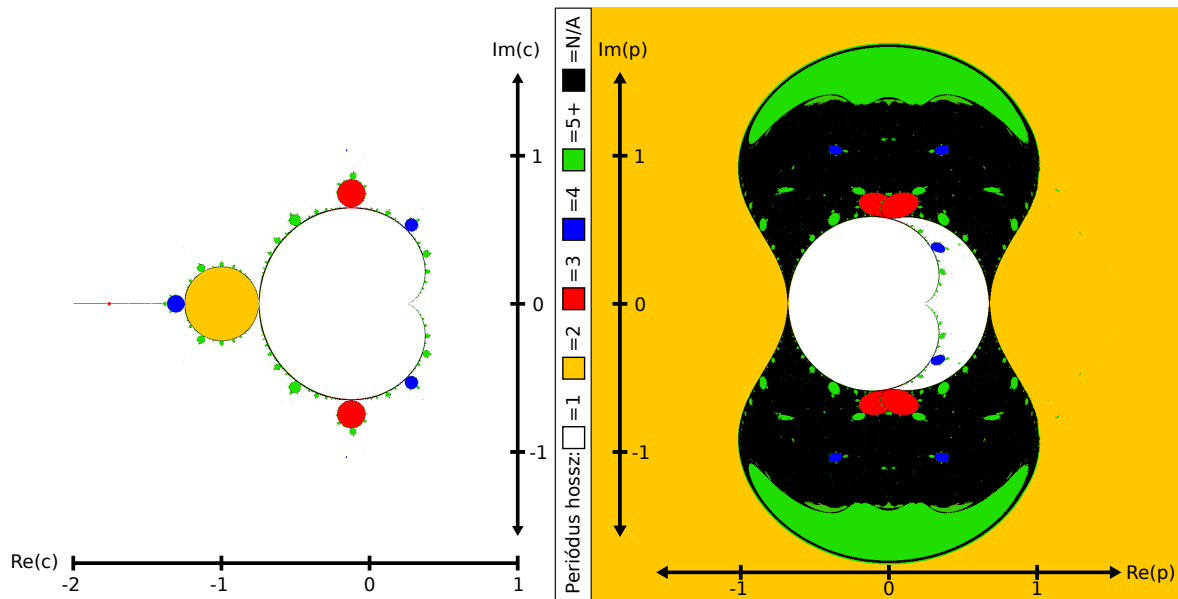
#### 4. A Bloch-gömb és Riemann-gömb kapcsolata

Ebben a szakaszban megalapozzuk azokat a fogalmakat, amik segítségével definiálhatjuk két leképezés dinamikai ekvivalenciáját. Ezáltal csökkenthetjük a paraméterek számát úgy, hogy csak a lényegesen különböző leképezésekre szorítkozunk. Ezen felül definiálunk egy metrikát is ami szükséges ahhoz, hogy Ljapunov-instabilitásról beszélhessünk.

##### 4.1. Bloch-gömb metrikával

A Bloch-gömb egy másik, globális fázis invariáns reprezentálása egy qubit állapotterének. Ebben az esetben nem a komplex projektív egyenesre képezzük le az állapotteret, hanem egy három dimenzióba ágyazott gömb felületére, a következő módon:

$$e^{i\omega} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right) \rightarrow (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$$



(a) A 0 határciklusai a  $z^2 + c$  leképezés esetén (b) A 0 határciklusai az  $f_p$  leképezés esetén

2. ábra. A 0 határciklusainak hosszai: Ezek az ábrák azt mutatják, hogy a 0 bekonvergált-e egy (vonzó) periodikus orbitához a megfelelő leképezés 1000 iterálása után, és ha igen milyen hosszú az adott orbit. (a) A híres Mandelbrot halmaz is a 0-nak a  $z^2 + c$  leképezésre vonatkozó távlati viselkedése alapján van definiálva. (Az ábrán a fekete pontok a Mandelbrot halmaz határának felelnek meg.) (b) A megfelelő ábra a mi leképezéseinkre vonatkozóan.

Valahol érezhető, hogy a Bloch-gömb és a Riemann-gömb ugyanazt a dolgot ragadja meg, de mégis hasznos ha látjuk a két fogalom közötti kapcsolatot és a különbségeket is.

A Bloch-gömböt természetes módon felruházzhatjuk egy irányított sokaság és metrikus struktúrával úgy hogy az tükrözze az alatta fekvő Hilbert-tér geometriát (azaz a távolságfüggvény a megfelelő állapotok skaláris szorzatának legyen valamilyen függvénye). Ez többféleképpen megtehető, a legtermészetesebb választás a sztenderd gömbi metrika. Ebben a metrikában két pont távolságát az őket összekötő legrövidebb ív hossza definiálja. Ennek a metrikának szép kapcsolata van a Hilbert-térbeli állapotokkal is, ugyanis a Bures metrikának felel meg:  $d(\psi_1, \psi_2) = 2 \cdot \arccos |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|$ . (Fizikai állapotokról lévén szó  $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$ , de két tetszőleges nem 0 Hilbert-térbeli vektorra is alkalmazhatjuk a fenti távolság definíciót normálás után.)

Mivel a metrika kifejezhető a skaláris szorzással, ezért épp azok lesznek a Bloch-gömb (irányítástartó) izometriái, amik egy qubit Hilbert-terének az izometriái, vagyis az  $U(2)$  csoport. De mivel a globális fázis irreleváns, elég az  $SU(2)$  csoportra koncentrálni, sőt igazából még tovább faktorizálhatunk az  $\{I, -I\}$  részcsoporttal. Másfelől az is világos, hogy a Bloch-gömb 3 dimenziós beágyazásainak (irányítástartó) izometria csoportja  $SO(3)$ . Ebben a rövid gondolatmenetben felfedezhetjük azt a köztudott tényt, miszerint  $SO(3)$ -nak megadható egy kétrétű  $SU(2)$  általi fedése. És egyben arra következtethetünk, hogy a Bloch-gömb izometrikus leképezései egyszerűen a mögöttes Hilbert-tér unitér transzformációinak feleltethetőek meg. Ez az összefüggés jól mutatja, hogy ez a metrikus struktúra híven tükrözi a mögöttes Hilbert-tér szerkezetét.

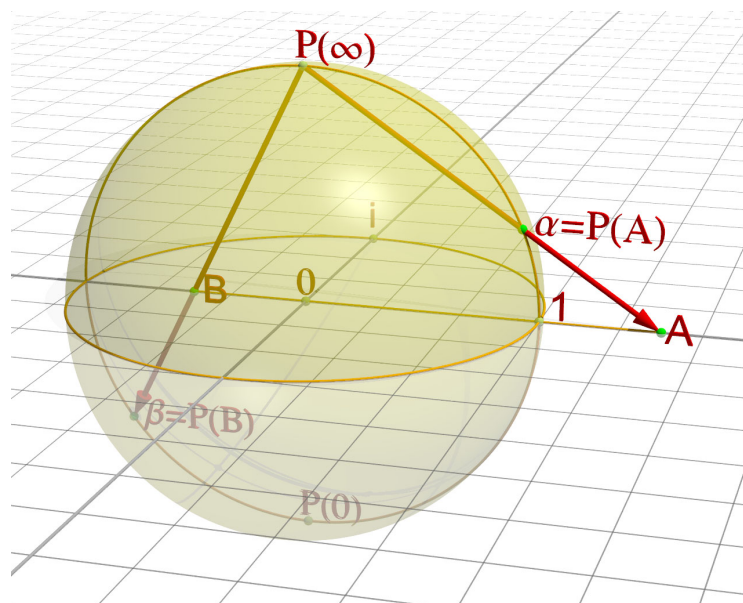
#### 4.2. Bloch-gömb konform struktúrával

A Riemann-gömb alapvetően nem más mint Bloch-gömb ellátva egy komplex sokaság struktúrával. A struktúra megadható két térkép által: egyik az északi, másik a déli pólus kivételével lefedi az egész gömböt. A gömb felszín és a komplex sík között a megfeleltetést a sztereografikus projekció adja:  $(x, y, z) \rightarrow (\frac{x}{1-z} - i\frac{y}{1-z})$  ilyen módon összeáll a kapcsolat a két reprezentáció között:

$$\left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right) \rightarrow (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)) \rightarrow \frac{\sin(\theta)\cos(\varphi)}{1 - \cos(\theta)} - i \frac{\sin(\theta)\sin(\varphi)}{1 - \cos(\theta)} = (\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)) \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{-i\varphi} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Az eredő leképezés ugyan az, mint amit már korábban definiáltunk. Az északi pólust lefedő térképet pedig a déli pólusból való sztereografikus projekció adja:  $(x, y, z) \rightarrow (\frac{x}{1+z} + i\frac{y}{1+z})$  (az irányítás tartás miatt az  $i$ -s tag előjelét meg kell fordítanunk)

$$(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)) \rightarrow e^{i\varphi} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



3. ábra. Sztereografikus projekció

A két térkép közötti áttérési leképezés az  $1/z$ , ami komplex differenciálható mint ahogy az áttérési függvényről el is várjuk. Ezt az áttérési függvényt már használtuk is a kritikus pontok kiszámításánál (6).

Felületek esetén az egy dimenziós komplex struktúra igazából ekvivalens egy (irányított) konform struktúra megadásával. A konformitás itt arra utal, hogy definiálhatjuk a felületen haladó különböző görbék szögét. Ez matematikailag azt jelenti, hogy a felületen adott egy (irányított) differenciálható struktúra és metrikus tenzorok egy ekvivalencia osztálya. A  $g$  és  $h$  metrikus tenzort akkor tekintünk ekvivalensnek, ha a kapcsolatot közöttük leírhatjuk egy  $\rho$  pozitív, sima nyújtásfüggvénnyel:  $g = \rho^2 h$ . Intuitíve ez azt jelenti, hogy lokális nyújtások erejéig van csak meghatározva a metrika.

#### 4.3. Kapcsolat a két strukturális kiterjesztés között

A komplex (konform) sokaság struktúra lazább, mint a teljes metrikus struktúra amit korábban definiáltunk. Az viszont fontos, hogy a megjelenő konform struktúra kompatibilis legyen a konkrét metrikával amit definiáltunk. Szerencsére ezzel nincsen gond, mivel a térképeinket a sztereografikus projekció révén definiáltuk, ami egy konform (azaz szögtartó) leképezés. A sztereografikus projekció révén ki is választhatjuk azt a metrikát a Riemann-gömbön, ami épp a Bloch-gömbön definiált metrikát adja vissza. Nem nehéz kiszámolni a kapcsolatot a gömbi  $|d\varphi|$  ívelemek és a síkon lévő  $|dz|$  szakaszlemek (avagy érintővektorok) hossza között:  $|d\varphi| = \frac{4|dz|}{1+|z|^2}$ . A nyújtásfüggvény tehát  $\rho = \frac{4}{1+|z|^2}$ . A konformitás ott érhető tetten ebben a formulában, hogy komplikált metrikus tenzorok helyett egyszerűen csak a  $|d\varphi|/|dz|$  arányt elég megadnunk - azaz lokálisan minden irányban ugyanannyira nyújtjuk a felületet. Ez a metrika a háttérben lévő Hilbert-térrel való kapcsolata miatt kitüntetett figyelmet érdemel, de a dinamikus

ekvivalencia szempontjából mégis érdemes lesz néha elengedni és csak a lazább Riemann-gömb struktúrával foglalkozni.

Végül érdemes még egy kis figyelmet fordítani arra, hogy hogyan is állnak össze az imént definiált összetett fogalmak. A dolgozat elején már láttuk, hogy az unitér leképezésekből hogyan lesznek lineáris törtfüggvények a Riemann-gömbön (2). Az imént állapítottuk meg, hogy az unitér leképezések a Bures metrikával ellátott Bloch-gömb izometriáinak felelnek meg. Már azt is tudjuk, hogy ezt a metrikát hogyan kell átvinnünk a Riemann-gömbre. Ha nem rontottunk el semmit, akkor ezek együttesen azt kell hogy adják, hogy a megfelelő lineáris törtfüggvények az előbb vázolt metrikára nézve invariánsak. Vegyünk tehát egy általános unitért transzformációt, illetve a neki megfelelő lineáris törtfüggvényt (2):  $y = \frac{ze^{-i\omega} + p}{-\bar{p}z + e^{i\omega}}$  a metrika invarianciáját jelen esetben a következő azonosság teljesülése biztosítja:

$$\begin{aligned} \frac{4|dy|}{1+|y|^2} &= \frac{4|dz|}{1+|z|^2} \Leftrightarrow \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{1+|y|^2}{1+|z|^2} \Leftrightarrow \left| \frac{e^{-i\omega}(-\bar{p}z + e^{i\omega}) + \bar{p}(e^{-i\omega}z + p)}{(-\bar{p}z + e^{i\omega})^2} \right| = \frac{1 + \left| \frac{ze^{-i\omega} + p}{-\bar{p}z + e^{i\omega}} \right|^2}{1 + |z|^2} \\ &\Leftrightarrow |e^{-i\omega}(-\bar{p}z + e^{i\omega}) + \bar{p}(e^{-i\omega}z + p)| (1 + |z|^2) = |-\bar{p}z + e^{i\omega}|^2 + |ze^{-i\omega} + p|^2 \\ &\Leftrightarrow (1 + |p|^2)(1 + |z|^2) = |pz|^2 - \cancel{\bar{p}z \cdot e^{-i\omega}} - \cancel{p\bar{z} \cdot e^{i\omega}} + 1 + |z|^2 + \cancel{ze^{-i\omega}\bar{p}} + \cancel{\bar{z}e^{i\omega}p} + |p|^2 \end{aligned}$$

#### 4.4. A Riemann-gömb automorfizmusai

A konform sokaság struktúra mint említettük lazább a teljes metrikus struktúrájánál. Emiatt az automorfizmus csoport is gazdagabb lesz, aminek fontos szerepe lesz a lényegesen különböző kvadratikus racionális törtfüggvények paraméterszámának redukálásában.

A Riemann-gömb konform automorfizmusai pontosan a nemelfajuló lineáris törtfüggvények, vagy más néven *Möbius-transzformációk*:

$$\left\{ m(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}; ad - bc \neq 0 \right\} / \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \sim \frac{\lambda a \cdot z + \lambda b}{\lambda c \cdot z + \lambda d} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Egy lineáris törtfüggvényt a számláló és a nevező szimultán szorzása nem változtat meg, ezért ezzel a relációval lefaktorizálunk. Az így kapott automorfizmus csoportot  $G(\hat{\mathbb{C}})$ -vel jelöljük és a Riemann-gömb konform automorfizmus csoportjának nevezzük. Ez a csoport izomorf a speciális lineáris csoport  $SL(2, \mathbb{C})$   $\{I, -I\}$ -által vett faktorcsoporthoz. Ez analóg azzal ahogy az izometria csoport azonosítottuk  $SU(2)/\sim \{I, -I\}$ -vel. Míg ott a csoport 3 valós paraméterrel volt paraméterezhető, itt 6 valós vagy 3 komplex paraméterrel lenne leírható a csoport.

## 5. Fizikailag illetve dinamikailag ekvivalens leképezések

A Riemann-(Bloch-)gömb két önmagára menő  $f, g$  leképezését akkor nevezzük *fizikailag ekvivalensnek*, ha a leképezések *izometrikusan konjugáltak*, azaz létezik egy olyan  $j$  izometria, amelyre nézve a két leképezés konjugált:  $f = j \circ g \circ j^{-1}$ . Az izometrikus

konjugáltság a leképezések iterálása közben megmarad, hiszen  $f^{on} = (j \circ g \circ j^{-1})^{on} = j \circ (g^{on}) \circ j^{-1}$ . Azért mondhatjuk ezeket a leképezéseket fizikailag ekvivalensnek, mert az izometriáknak unitér transzformációk felelnek meg a Hilbert-térben. Ha most az unitér transzformációkra mint passzív transzformációkra gondolunk akkor világossá válik, hogy két leképezés akkor fizikailag ekvivalens, ha ugyan az a folyamat írja le őket csak egy másik bázisban nézve. Az unitér transzformációt ez esetben mint bázistranszformáció kell értelmeznünk.

azonos folyamat másik bázisban felírva  $\leftrightarrow$  izometrikusan konjugált leképezések (Sz7)

Ennek a relációnak a segítségével már meg is tudom mutatni, hogy a dolgozat elején felvázolt  $z \rightarrow \frac{z^2 e^{-i\omega} + p}{-\bar{p}z^2 + e^{i\omega}}$  általános leképezésben  $\omega$  lényegtelen paraméter. Vegyünk most egy unitér operátor által definiált izometriát:  $z \rightarrow e^{-2i\omega} z$ , (ez a Bloch-gömb egy tengely körüli forgatásának felel meg) és konjugáljuk meg vele a fenti leképezést:

$$e^{-2i\omega} z \circ \frac{e^{-i\omega} z^2 + p}{-\bar{p}z^2 + e^{i\omega}} \circ e^{2i\omega} z = e^{-2i\omega} \frac{z^2 e^{3i\omega} + p}{-\bar{p}e^{4i\omega} z^2 + e^{i\omega}} = \frac{z^2 + pe^{-3i\omega}}{-\bar{p}e^{3i\omega} z^2 + 1}$$

Ez a kis számolás azt mutatja, hogy a  $(p, \omega)$  és a  $(pe^{-3i\omega}, 0)$  paraméterek által definiált leképezések fizikailag ekvivalensek, vagyis az egyik a másikba átvihető egy  $(|0\rangle, |1\rangle) \rightarrow (e^{-2i\omega} |0\rangle, |1\rangle)$  báziscsere végrehajtásával.

Hasonló a helyzet a  $z \rightarrow \frac{-e^{-2i\varphi}}{z^2}$  léképezéssel, ez is fizikailag ekvivalens az  $1/z^2$  leképezéssel, amit a  $z \rightarrow e^{i\frac{2\varphi+\pi}{3}} z$  izometria mutat:

$$e^{i\frac{2\varphi+\pi}{3}} z \circ \frac{-e^{-2i\varphi}}{z^2} \circ e^{-i\frac{2\varphi+\pi}{3}} z = e^{i\frac{2\varphi+\pi}{3}} \frac{-e^{-2i\varphi}}{e^{-2i\frac{2\varphi+\pi}{3}} z^2} = \frac{1}{z^2}$$

A leképezésünk  $p \in \mathbb{C}$  paraméterrel való leírásában is van még egy kis redundancia, és ezt az  $1/z$  leképezés mutatja. Az ide kapcsolódó konjugációt már igazából ki is számoltuk (5), de akkor még mint koordinátatranszformációra gondoltunk erre az összefüggésre:  $(1/z) \circ f_p \circ (1/z) = f_{-\bar{p}}$ . Most már azt mondhatjuk, hogy  $f_p$  és  $f_{-\bar{p}}$  fizikailag ekvivalensek. Vagyis a paraméterter valamilyen értelemben tükrös szimmetriát mutat a képzetes tengely mentén. Az elsőnek közölt paraméterter ábrán azonban nem volt teljes a szimmetria. Ennek az az oka, hogy az  $1/z$  leképezésnek van egy további érdekessége is, ugyanis felcseréli a 0-t és a  $\infty$ -t azaz a két kritikus pontot. Mindemellett a transzformációnak nagyon egyszerű fizikai interpretációja is van: fizikai szempontból egyszerűen a bázis elemek  $(|0\rangle, |1\rangle)$  felcseréléséről van szó.

### 5.1. dinamikailag ekvivalens leképezések

Az előzőek mintájára definiálhatjuk a *konform (vagy holomorfn) konjugációt*. A Riemann-gömb két önmagára menő  $f, g$  leképezése konform konjugált, ha létezik egy olyan  $m$  Möbius-transzformáció melyre nézve a két leképezés konjugált:  $f = m \circ g \circ m^{-1}$ . A kapcsolódó iterált rendszereket *dinamikailag ekvivalensnek* nevezünk, ha a generáló lépések konform konjugáltak. Itt is igaz marad, hogy az iterált leképezések is mindig



konform konjugáltak maradnak. Intuitíve nézve a két leképezés ugyan az, csak a Riemann-gömb két egymáshoz képest elforgatott, kicsit megnyújtott verzióján nézve.

A konform konjugáció fizikai értelmezése kissé problematikus a mi konkrét rendszerünk esetén. Esetleg lehetne úgy interpretálni, hogy ugyanazt a folyamatot nézzük, csak másik metrikában mérve. Viszont nagyon hasznos eszköz lesz a számunkra amikor el akarjunk majd helyezni a mi fizikai folyamatunkat az általános kvadratikus racionális törtfüggvények terében. A fizikai értelmezés problematikájával már csak azért sem érdemes foglalkoznunk, mert ki fog derülni, hogy az általunk vizsgált leképezések pontosan akkor ekvivalensek dinamikailag, amikor fizikailag. Ezt akár direkt számolással is megmutathatnánk egy kis munka árán, de a következő szakasz általános technikáival sokkal könnyebben célba érhetünk.

Ezen a ponton meg kell még jegyeznünk, hogy a komplex konjugálás is egyfajta szimmetriáját adja a leképezéseknek:  $\bar{z} \circ f_p \circ \bar{z} = \left( \frac{\bar{z}^2 + p}{-p\bar{z}^2 + 1} \right) = f_{\bar{p}}$  Bár intuitíve ezeket a leképezéseket is hívhatnánk dinamikailag ekvivalensnek, nem tesszük, mert a konjugálás csak a komplex számok belső automorfizmusa, de nem konform leképezés mert nem tartja meg az irányítást. Hasonlóan fizikailag sem kivitelezhető transzformáció.

## 6. Általános kvadratikus törtfüggvények

Az általános kvadratikus törtfüggvények tere ( $\text{Rat}_2$ ) a következőképpen definiálható:

$$\text{Rat}_2 = \left\{ q(z) = \frac{a \cdot z^2 + b \cdot z + c}{d \cdot z^2 + e \cdot z + f} \mid q \text{ másodfokú} \right\} / \frac{g}{h} \sim \frac{\lambda \cdot g}{\lambda \cdot h} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (7)$$

A definícióban az a feltétel, hogy  $q$  másodfokú azt jelenti, hogy  $q$  racionális alakjában  $\left(\frac{g}{h}\right)$   $g$  és  $h$  legfeljebb másodfokú komplex polinomok, és az egyik pontosan másodfokú, egyik sem 0 továbbá  $g, h$ -nak nincs közös gyöke.

$\text{Rat}_2$  egy 5 (komplex) dimenziós sokaság [17], ami nem meglepő, hiszen 6 komplex paraméterrel írhatjuk fel általánosan, és le kell faktorizálnunk a nevező és a számláló szimultán szorzásának relációjával. Ennek a térnek a globális topológiája meglehetősen bonyolult. Viszont ez a tér nagyon redundáns, rengeteg különböző eleme írja le lényegében ugyan azt a dinamikát. A Möbius-transzformációk segíthetnek ezen, ugyanis a kvadratikus racionális törtfüggvényeket egymásba viszi bijektív és sima módon. Így gond nélkül lefaktorizálhatunk a  $G(\hat{\mathbb{C}})$  elemeivel vett (konform) konjugálás relációval, hogy megszabaduljunk a redundanciától és kényelmesen elkülöníthessük a dinamikailag lényegesen különböző leképezéseket. Az így kapott faktor teret ( $M_2$ ) *modulus (moduli) térnek* hívják, mindez formálisan:

$$M_2 = \text{Rat}_2 / f \sim m \circ f \circ m^{-1} \quad (m \in G(\hat{\mathbb{C}}))$$

$M_2$  elemei tehát a kvadratikus racionális függvények konform konjugált osztályainak felelnek meg.

Szerencsére  $M_2$ -nek már sokkal egyszerűbb topológiája van, és a paraméterek száma is öröndetesen csökkent, hiszen  $M_2$  egy 2 (komplex) dimenziós sokaság. Ez

az eredmény megint csak nem meglepő, hiszen egy 5 dimenziós teret faktorizáltunk le egy 3 dimenziós relációval. Az már sokkal meglepőbb, hogy a csúnya, lyukakkal átszótt  $\text{Rat}_2$  a faktorizálás után izomorf (sőt biholomorf) lesz  $\mathbb{C}^2$ -hez. Így tehát  $M_2$  a lehető legegyszerűbb topológiával rendelkezik! Ez a tény normálformák segítségével bizonyítható:

### 6.1. Normálformák és konform konjugálási invariánsok

Bármely kvadratikus racionális törtfüggvény áttranszformálható egy úgynevezett *kritikus pont normálformába*:

$$\frac{\alpha \cdot z^2 + \beta}{\gamma \cdot z^2 + \delta} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}; \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

A név onnan ered, hogy az ilyen alakú leképezések esetében a kritikus pontok mindig a 0 és a  $\infty$  lesznek. Ez a normál forma ugyan még nem egyértelmű, de a segítségével szépen definiálható két komplex invariáns:

$$A = \frac{\alpha\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}, B = \frac{\alpha^3\beta + \gamma\delta^3}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$$

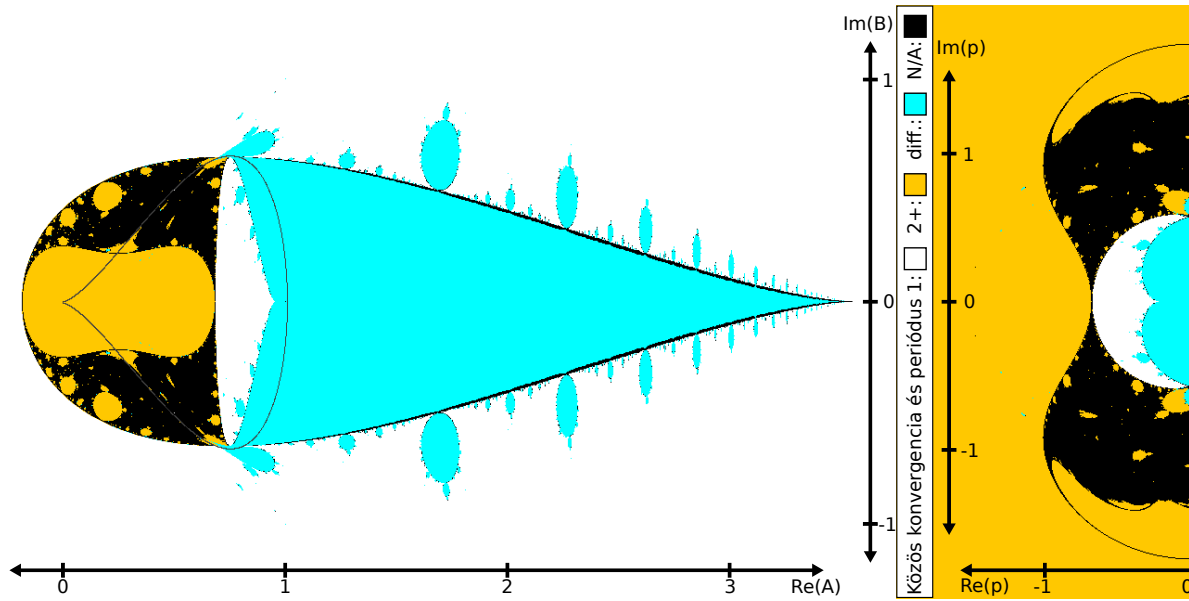
Ezek az invariánsok együttesen már egyértelműen meghatározzák a konform konjugált osztályt, és egyben bármely  $\mathbb{C}^2$ -beli értékükre létezik is megfelelő konjugált osztály - mutatván, hogy  $M_2 \simeq \mathbb{C}^2$ .

A mi leképezéseink szerencsére már eleve ebben a formában vannak (akár csak a Mandelbrot leképezések), ami nagyon kényelmessé teszi az erre a normálformára vonatkozó állítások használatát. Az általunk vizsgált  $f_p$  leképezések esetén az invariánsok az alábbi értékeket veszik fel:

$$A_p = \frac{1}{1 + |p|^2}, B_p = \frac{2i \cdot \text{Im}(p)}{(1 + |p|^2)^2}$$

Jól láthatóan csak  $p$  és  $-\bar{p}$  adja ugyanazt az érték párt - tehát minden paraméter, amelyre  $\text{Re}(p) \geq 0$  (vagy  $\leq 0$ ) lényegesen különböző dinamikára vezet. Ezzel lényegében bizonyítottuk azt is, hogy a leképezésink között a dinamikusan ekvivalensek egyben fizikailag is ekvivalensek. Érdeemes még megjegyezni, hogy a Mandelbrot leképezések  $(z^2 + c)$  esetén az invariánsok értéke:  $A_c = 1, B_c = c$ . Ebből arra következtethetünk, hogy a mi leképezés családukkal konform konjugálás erejéig az egyetlen közös elem a  $p = 0 = c$  paraméterhez tartozó leképezés, nevezetesen  $f_0 = z^2 = z^2 + 0$ .

Az  $M_2$  térre úgy is gondolhatunk mint a kvadratikus racionális dinamika egyfajta "tartalomjegyzékére". Már csak ezért is érdekes elhelyezni ebben a térben a mi leképezéseinket. Mivel  $M_2$  2 komplex dimenziós avagy 4 valós dimenziós sokaság, nehéz az egészet egyben áttekinteni. Ezért is általában a tér 1 (komplex) dimenziós szeleteit szokás ábrázolni. Például a Mandelbrot leképezések családja  $(z^2 + c)$  az  $(A = 1, B = c)$  paraméterezésű szeletet ábrázolja, további szép példák találhatóak még pl. [17]-ben. Annak ellenére, hogy a mi leképezés családukkal  $(f_p)$  csak egy részleges szeletet



4. ábra. Bal oldal: Az 2 (valós) dimenziójú szelet  $Im(A) = 0$ ,  $Re(B) = 0$ , és a mi paraméter terünk benne (a határát a középen látható csepp alakú szürke vonal jelöli). Jobb oldal: A mi paraméterterünk.

Az ábra a leképezések egy konform invariáns tulajdonságát jelöli: a kritikus pontok mint pont pár konvergenciáját. Numerikus módszerrel négy esetet különítettünk el. Fehér: a kritikus pontok ugyan ahhoz a ponthoz konvergálnak. Sárga: ugyan ahhoz a legalább kettő hosszú orbitához konvergálnak. Türkiz: Különböző orbitokhoz konvergálnak. Fekete: Legalább az egyik nem konvergál.

reprezentál  $M_2$ -ben, így is egy nagyon érdekes részét fedi le az  $(Im(A) = 0, Re(B) = 0)$  szeletnek, l. 4. ábra. Ez a paraméter szelet azonban nem tekinthető 1 dimenziós komplex szeletnek, csak 2 dimenziós valós szeletnek, mivel a  $c \rightarrow (Re(c), Im(c))$  valós lineáris leképezés nem tehető komplex lineárisrá. Másképp mondva ez a szelet nem tekinthető  $M_2$  részsokaságának komplex értelemben, csak valós értelemben. Az ilyen valós szeletekről kevesebb irodalom van. [17]-ben például csak egy ilyen jellegű szeletet említenek meg, az úgy nevezett valós  $M_2$ -t ( $Im(A) = 0, Im(B) = 0$ ). Ezen tér pontjai azoknak a konform ekvivalenciaosztályoknak felelnek meg, amelyeknek van csupa valós együtthatóval felírható eleme.

## 7. Hiperbolikus leképezések és pozitív Ljapunov-exponens megjelenése

**Definíció:** Azt mondjuk, hogy az  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  leképezés *tágul* az  $X \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  kompakt  $f$  invariáns részhalmazra nézve, ha  $X$  egy nyílt  $N_X$  környezetén létezik olyan  $\mu$  konform metrika, amelyre a következő teljesül:  $\forall z \in X, \underline{v} \neq 0: \|Df_z(\underline{v})\|_\mu > \|\underline{v}\|_\mu$ . Itt a  $Df_z$  leképezés az  $f$  deriváltleképezése, ami formálisan a  $z$  és  $f(z)$  pontokban lévő érintőterek között hat, így aztán  $v$  a  $z$ -beli érintőtér egy tetszőleges nem 0 vektora.

Ez a definíció a Riemann-gömbi konform struktúra fogalmkörével dolgozik, amit

már tárgyaltunk a 4.3 szakaszban. Az ott bemutatott egyszerű metrika reprezentáció segítségével egyszerűbben is meg tudjuk fogalmazni a  $\mu$ -re vett kritériumot. Ehhez  $\mu$ -t egyszerűen a  $\rho > 0$  sima nyújtásfüggvénnyel reprezentáljuk, a korábban már megadott gömbi metrikához viszonyítva. Ebben az esetben az előbbi követelmény átalakul a  $\frac{|df(z)|}{|dz|} > \frac{\rho(z)}{\rho(f(z))}$  feltétellé, ahol most  $|df(z)|$  és  $|dz|$  a gömbi metrikára vonatkozóan értendő.

Az  $f$  racionális törtfüggvényt, illetve a hozzá tartozó  $J$  Julia-halmazt *hiperbolikusnak* nevezzük, ha  $f$   $J$ -re nézve tágul.  $J$  kompaktsága miatt ekkor létezik olyan  $a > 1$  *tágulási konstans*, hogy az erősebbnek tűnő  $\frac{|df(z)|}{|dz|} \geq a \frac{\rho(z)}{\rho(f(z))}$  feltétel is teljesül  $J$  minden pontjában.  $J$  kompaktságából és a  $\rho > 0$  nyújtásfüggvény folytonosságából az is következik, hogy  $\exists K < \infty$  szám, hogy  $\forall z \in J: 1/K < \rho(z) < K$ .

### 7.1. Hiperbolikus Julia-halmaz Ljapunov-exponense pozitív

Az előbbi definíciókat és észrevételeket felhasználva megállapíthatjuk, hogy a hiperbolikus leképezések Julia-halmazon vett (alsó) Ljapunov-exponense pozitív a sztenderd gömbi metrikára nézve: a  $z$  pontban vett  $\underline{\lambda}_z$  alsó Ljapunov-exponens definíció szerint  $\underline{\lambda}_z = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln (|f'(z)| \cdot |f'(f(z))| \cdot \dots \cdot |f'(f^{n-1}(z))|)$ . (Mostantól a fejezet végéig az  $|f'(x)|$  jelölés alatt az  $\frac{|df(z)|}{|dz|}$  értékét értjük a gömbi metrikára vonatkozóan.)

$J$  pontjaiban ezt a mennyiséget egyenletesen tudjuk alulról becsülni a következő módon:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_z &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( a \frac{\rho(z)}{\rho(f(z))} \cdot a \frac{\rho(f(z))}{\rho(f(f(z)))} \cdot \dots \cdot a \frac{\rho(f^{n-1}(z))}{\rho(f^n(z))} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( a^n \frac{\rho(z)}{\rho(f^n(z))} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{a^n}{K^2} \right) = \ln(a) > 0 \end{aligned}$$

Ebből tehát azt kapjuk, hogy a Julia-halmazon a leképezés alsó Ljapunov-exponense pozitív:

$$\underline{\lambda}_J = \inf\{\underline{\lambda}_z : z \in J\} \geq \ln(a) > 0$$

A megfordítás is igaz. Ehhez először megmutatom, hogy pozitív alsó Ljapunov-exponens létezéséből következik, hogy bizonyos iteráció szám után a leképezés tágul lesz a sztenderd metrikában, ezután pedig egy ismert tétel segítségével már készen leszünk.

### 7.2. Pozitív alsó Ljapunov-exponens létezéséből következik a hiperbolikusság

Tegyük fel hogy  $\underline{\lambda}_J = b > 0$ . Ekkor a határérték definícióját és  $f'$  valamint  $f$  iteráltjainak folytonosságát kihasználva:

$$\forall z \in J : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln (|f'(z)| \cdot |f'(f(z))| \cdot \dots \cdot |f'(f^{n-1}(z))|) \geq b \Rightarrow$$

$$\forall z \in J \exists N_z : \frac{1}{N_z} \ln (|f'(z)| \cdot |f'(f(z))| \cdot \dots \cdot |f'(f^{N_z-1}(z))|) \geq \frac{3}{4}b \Rightarrow$$

$$\forall z \in J \exists N_z \exists \epsilon_z > 0 : \forall x \in J \cap B(z, \epsilon_z) : \ln (|f'(x)| \cdot |f'(f(x))| \cdot \dots \cdot |f'(f^{N_z-1}(x))|) \geq N_z \frac{2}{4}b$$

(Megjegyzés:  $N_z$ -t itt most szándékosan nem küszöbindexként definiáljuk, ezért  $\epsilon_z > 0$  létezése egyszerűen  $f^{\circ N_z}$  deriváltjának folytonosságából következik.)

$J$  kompaktsága miatt található a fenti tulajdonsággal rendelkező véges ( $m$  elemszámú) fedés:  $\{(z_i, \epsilon_i, N_i) : i \in 1 \dots m\}$ , hogy  $J \subset \bigcup_{i=1}^m B(z_i, \epsilon_i)$  és így

$$\forall x \in J \exists i \in 1 \dots m : x \in B(z_i, \epsilon_i) \implies |f'(x)| \cdot |f'(f(x))| \cdot \dots \cdot |f'(f^{\circ N_i-1}(x))| \geq e^{\frac{b}{2}N_i}.$$

A kritikus pontokban a Ljapunov-exponens mindig  $-\infty$ , tehát pozitív Ljapunov-exponens létezése esetén a kritikus pontok nem lehetnek a Julia-halmazban. Így a derivált sehol sem tűnik el  $J$ -n.  $f'$  folytonosságát valamint  $J$  kompaktságát kihasználva adódik, hogy egyenletesen tudjuk alulról becsülni  $f'$ -t valamilyen  $q \in \mathbb{R}$  konstans segítségével az alábbi módon:  $\forall z \in J : |f'(z)| > e^{-q}$ . Minél nagyobb  $q$ -t választunk annál gyengébb alsó becslést kapunk, az egyszerűség kedvéért most mégis tegyük fel, hogy  $q > 0$ .

Most próbáljuk meg alulról becsülni  $|(f^{\circ M})'(z)|$ -et feltéve, hogy  $z \in J$  és  $z \in B(z_{i_1}, \epsilon_{i_1})$  valamint  $N_{i_1} \leq M$

$$|(f^{\circ M})'(z)| = \prod_{n=0}^{M-1} |f'(f^{\circ n}(z))| = \prod_{n=0}^{N_{i_1}-1} |f'(f^{\circ n}(z))| \prod_{n=N_{i_1}}^{M-1} |f'(f^{\circ n}(z))| \geq e^{\frac{b}{2}N_{i_1}} \prod_{n=N_{i_1}}^{M-1} |f'(f^{\circ n}(z))|$$

Tovább folytatjuk az alsó becslést. Mivel  $z \in J$  ezért  $f^{\circ N_{i_1}}(z) \in J$  is teljesül a Julia-halmaz invarianciája miatt (3.1). Tegyük fel, hogy  $f^{\circ N_{i_1}}(z) \in B(z_{i_2}, \epsilon_{i_2})$  és  $N_{i_1} + N_{i_2} \leq M$ , ekkor újabb alsó becslést kapunk:  $\prod_{n=N_{i_1}}^{M-1} |f'(f^{\circ n}(z))| \geq e^{\frac{b}{2}N_{i_2}} \prod_{n=N_{i_1}+N_{i_2}}^{M-1} |f'(f^{\circ n}(z))|$ . A becslést indukcióval egészen addig folytathatjuk amíg  $N_{i_1} + N_{i_2} + \dots + N_{i_k} \leq M$ , és akkor állunk le amikor  $N_{i_{k+1}} > M - (N_{i_1} + N_{i_2} + \dots + N_{i_k})$ . Bevezetve az  $N = \max\{N_j\}$  jelölést és kihasználva, hogy  $N > M - (N_{i_1} + N_{i_2} + \dots + N_{i_k})$ , avagy  $N_{i_1} + N_{i_2} + \dots + N_{i_k} > M - N$  a következő alsó becslést rakhatjuk össze:

$$|(f^{\circ M})'(z)| \geq e^{\frac{b}{2}(N_{i_1} + \dots + N_{i_k})} \prod_{n=N_{i_1} + \dots + N_{i_k}}^{M-1} |f'(f^{\circ n}(z))| > e^{\frac{b}{2}(M-N)} \cdot e^{-qN} \quad (8)$$

Most már csak azt kell biztosítanunk, hogy az exponenciális hatványkitevő  $(M - N)\frac{b}{2} - Nq$  pozitív legyen, azaz  $(M - N)\frac{b}{2} > Nq \Leftrightarrow M > \left(\frac{2q}{b} + 1\right)N$  teljesüljön. Például az  $M = \left\lceil \frac{2(q+b)}{b} \right\rceil N$  választás megfelelő. Ezen  $M$  érték segítségével definiáljuk  $d := e^{(M-N)\frac{b}{2} - Nq} > 1$ -et. A (8) alsó becslés értelmében  $\forall z \in J : |(f^{\circ M})'(z)| > d$  a sztenderd gömbi metrikára vonatkozóan, ami definíció szerint azt jelenti, hogy  $f^{\circ M}$  tágul  $J$ -n.

Vizsgáljuk a derivált értékét egy általános  $k = \ell \cdot M + r$  ( $0 \leq r < M$ ) kitevő esetén. Bevezetve a  $\gamma := d^{1/M} > 1$  és  $c := \frac{e^{-q \cdot M}}{d} > 0$  jelöléseket bármely  $z \in J$  esetén teljesül:

$$|(f^{\circ k})'(z)| = \prod_{i=0}^{\ell-1} |(f^{\circ M})'(f^{\circ i \cdot M}(z))| \prod_{j=0}^{r-1} |f'(f^{\circ \ell \cdot M + j}(z))| \geq d^\ell e^{-q \cdot r} > d^{k/M} \frac{e^{-q \cdot M}}{d} = c \cdot \gamma^k$$

Ez látszólag valamivel gyengébb mint a korábbi tágulás definíciónk, de voltaképpen mégis következik belőle a hiperbolikusság [24, Tétel 2.8]. (Megjegyzés: az idézett cikkben a hiperbolikusság egy másik definícióját használják, mint amit mi bevezettünk, de racionális törtfüggvények esetén a két definíció ekvivalens [16, §19].)

### 7.3. Hiperbolikus és pozitív Ljapunov-exponensű leképezések jellemzései

Az eddig kifejtett gondolatmeneteket összetéve megkapjuk a dolgozat egyik fő tételét.

**Tétel:** Pontosán azok a kvadratikus racionális törtfüggvények hiperbolikusak, amelyeknek a Julia-halmazra vett (alsó) Ljapunov-exponense pozitív.

A racionális törtfüggvényekre vonatkozó hiperbolikusság és a Ljapunov-exponens kapcsolatát ilyen egyszerű direkt módon tárgyaló állításra eddig nem leltem a szakirodalomban. Ennek valószínűleg az a fő oka, hogy a komplex dinamikai rendszerek szakterületén a matematikusok más fogalomrendszerrel dolgoznak és a Ljapunov-exponens fogalma helyett legtöbbször inkább a fejezet elején definiált tágulás fogalmával dolgoznak. Matematikailag a két fogalom nagyban hasonlít, a bizonyítás utolsó lépésben egy kapcsolódó állítást fel is használtam. Így ez a tétel matematikai szempontból talán kevésbé érdekes, a fizikai rendszer és a matematikai leírás közötti hatékonyabb fordítás szempontjából mégis nagyon hasznos. Ezzel tehát a szótárunk egy új fontos elemmel bővült:

A Julia-halmazon vett Ljapunov-exponens pozitív  $\leftrightarrow$   $f$  hiperbolikus leképezés (Sz8)

A két fogalom közötti direkt kapcsolat megértése után bátran használhatjuk a hiperbolikus leképezésekre vonatkozó matematikai eredményeket a leképezések klasszifikálására. Az imént említettük, hogy a racionális törtfüggvények hiperbolicitásának sok ekvivalens jellemzése van. Most, hogy a fenti ekvivalenciát megmutattuk a dolgozat hátralévő részében áttérünk egy kézzelfoghatóbb jellemzésre, ami egyből mutatja majd a feltárt kapcsolat hasznosságát:

**Tétel [16, §19]:** Egy kvadratikus racionális törtfüggvény akkor és csak akkor hiperbolikus, ha mindkét kritikus pontja egy-egy vonzó periodikus orbithoz tart.

Ez a tétel könnyen beazonosíthatóvá teszi a hiperbolikus leképezéseket. A mi paraméterterünkben azok a paraméterek vezetnek hiperbolikus dinamikára, amelyek a 4. ábrán ki vannak színezve (vagyis nem feketék). Az ábrából arra következtethetünk, hogy széles paramétertartományokban jelennek meg azok a leképezések, amelyek erős értelemben Ljapunov-instabilak a Julia-halmazukon. Ez az ábra ugyan csak numerikus számítás eredménye, de szerencsére ez a klasszifikáció numerikusan aránylag stabil. Könnyen meggondolható például, hogy hiperbolikus leképezések paramétereit kissé perturbálva még mindig hiperbolikus leképezést kapunk. Ezt másképp megfogalmazva úgy mondhatjuk, hogy a hiperbolikus leképezések nyílt halmazt alkotnak  $M_2$ -ben (illetve  $Rat_2$ -ben).

A hiperbolikus leképezések amellet, hogy viszonylag regulárisan viselkednek, eléggé sűrűen elő is fordulnak. Az *általános hiperbolicitási sejtés* [16, §19] ennél többet is

sugall, a sejtés szerint a hiperbolikus leképezések sűrűen helyezkednek el a racionális törtfüggvények terében.

## 8. Négyféle hiperbolikus dinamika

Mint már említettük, a hiperbolikus leképezések paraméterei nyílt halmazt alkotnak az  $M_2$  paraméterterben. A sejtés szerint ráadásul sűrűen is helyezkednek el, tehát valamilyen értelemben tekinthetjük tipikusnak a hiperbolikus viselkedést.

A hiperbolikus leképezések viszonylag reguláris viselkedésből következik az is, hogy a Julia-halmazok folytonosan transzformálódnak hiperbolikus paraméteren keresztül [16, §19]. A hiperbolikus paraméterek nyílt halmazának egyes komponenseiben lévő paraméterek tehát valamilyen értelemben hasonló dinamikát írnak le. Az  $M_2$  tér ezen összefüggő nyílt halmazait *hiperbolikus komponenseknek* nevezik. A hiperbolikus komponensek 4 osztályba sorolhatóak dinamikai szempontból [17]. Az osztályozás precíz megfogalmazásához még be kell vezetnünk egy fogalmat

**Definíció:** egy  $z_0 = f^{on}(z_0)$  vonzó periodikus pont *közvetlen vonzáskörzete* alatt az  $f^{on}$  függvény iteráltjai által  $z_0$ -hoz konvergáló pontok nyílt halmazának azon komponensét értjük, amelyben maga  $z_0$  is benne van. Ezt ekvivalens módon úgy is megfogalmazhatjuk, hogy  $z_0$  *közvetlen vonzáskörzete* a Fatou-halmaz  $z_0$ -hoz tartozó összefüggőségi komponense.

Most már jellemezhetjük  $M_2$  hiperbolikus komponensek 4 lehetséges osztályát [19]:

**B típus (Bitransitive):** A két kritikus pont ugyanazon periodikus orbit két különböző pontjának közvetlen vonzáskörzetébe tartozik. Ebben az esetben az orbit hossza természetesen legalább 2.

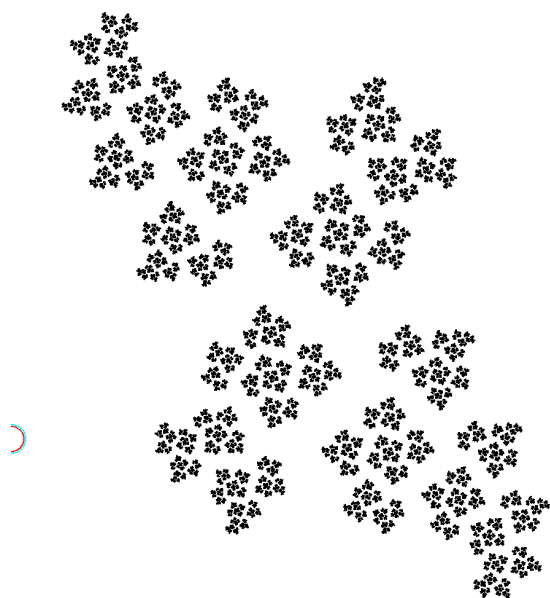
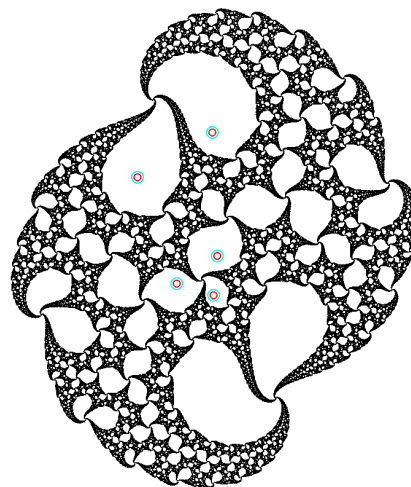
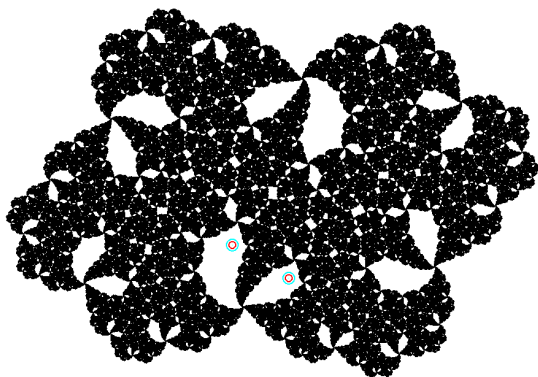
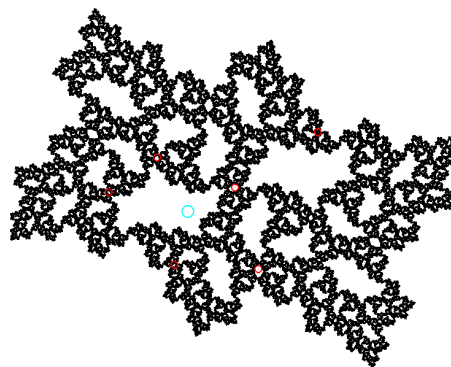
**C típus (Capture):** A két kritikus pont ugyanazon periodikus orbithez tart, de csak az egyik tartozik valamelyik periodikus pontjának közvetlen vonzáskörzetébe. Ebben az esetben is belátható, hogy a megfelelő orbit hossza legalább 2.

**D típus (Disjoint attractors):** A két kritikus pont két különböző vonzó periodikus orbit vonzáskörébe tartozik.

**E típus (Escape):** Mindkét kritikus pont ugyanahhoz a vonzó fixponthoz tart.

A 4-ből 3 típus tekinthető közelebbi rokonnak, a B, C és D típusúak. Az előbbi három típusú hiperbolikus komponens mindegyikéből végtelen sok van  $M_2$ -ben, míg E típusúból csak egy. További hasonlóság, hogy az első három típushoz tartozó Julia-halmazok összefüggőek, sőt lokálisan is összefüggőek. Közben az E típusú Julia-halmazok teljesen szétesettek, a Cantor-halmaz folytonos transzformáltjai.

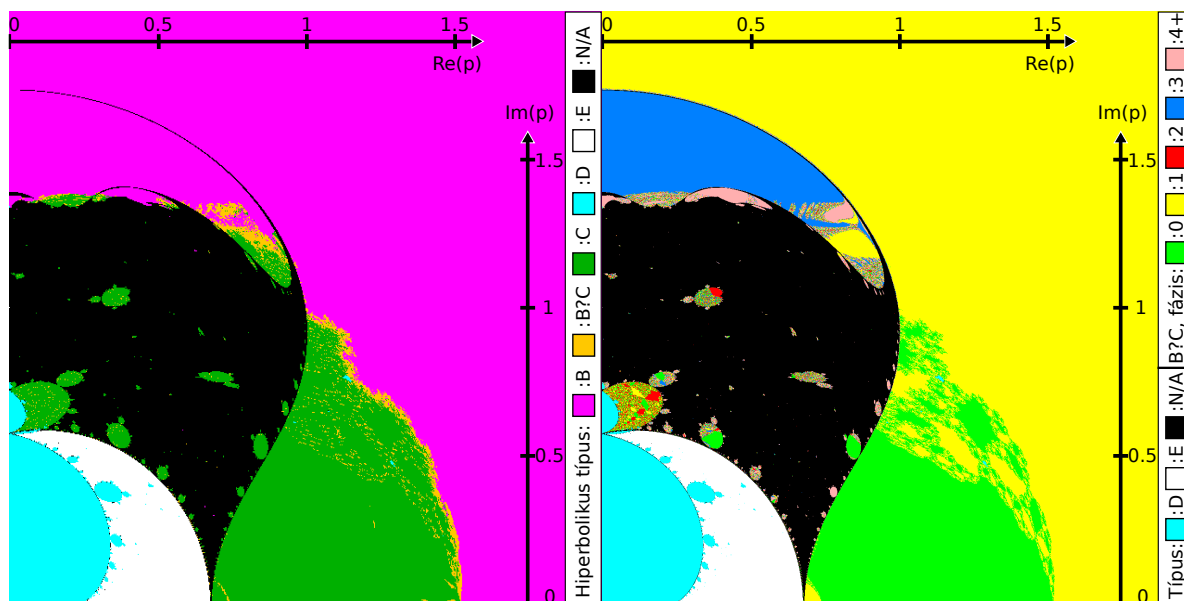
A mi általunk vizsgált leképezés család mind a négy típusú hiperbolikus leképezést tartalmaz, sőt már csak a valós paraméterű leképezések is belemetszenek mind a 4 típusú komponensbe, l. 6. ábra. Nehéz azonban különbséget tenni a B és C típusú dinamika között, mert el kell hozzá különíteni a Fatou-halmaz különböző komponenseit, hogy kiderüljön mindkét kritikus pont a vonzó orbit közvetlen vonzáskörzetében van-e. Ehhez viszont a komponenseket elhatároló Julia-halmazt kell kiszámolni, ami sokszor

(a) E típus:  $p = 0.5 + 0.25i$ ;  $\text{Re}(z) \in [-2, 2]$ (b) B típus:  $p = 1.6i$ ;  $\text{Re}(z) \in [-4, 4]$ (c) C típus:  $p = -0.14 + 0.675i$ ;  $\text{Re}(z) \in [-5, 5]$ (d) D típus:  $p = 1.14 + 0.76i$ ;  $\text{Re}(z) \in [-4, 4]$ 

5. ábra. Julia-halmazok és a 4 fajta dinamika. A valós és a képzetes skála megegyezik, a középpont mindig a 0. A piros karikák jelölik a 0-hoz tartozó vonzó periodikus orbit pontjait, míg a türkiz a  $\infty$ -ét. Mind a 4 ábra esetén volt egy-egy vonzó pont ami nem fért rá az ábrára, így a szélén a megfelelő irányban egy nagyobb fél karikával van jelölve.

nehéz feladat. Az ábrán a B és C típusúnak színezett pontok esetén a programom automatikusan kiszámolta a Julia-halmazt és addig finomította amíg kielégítőnek nem ítélte az osztályozás szempontjából. Ezután megkereste a komponenseket és ez alapján osztályozta a leképzést. Ez a folyamat időnként túl sok erőforrást igényelt volna, erre az esetre egy külön szín utal, ahol nem sikerült numerikusan megnyugtató eredményre





(a) A 4 féle hiperbolikus komponens

(b) Kritikus pontok konvergencia fázisai

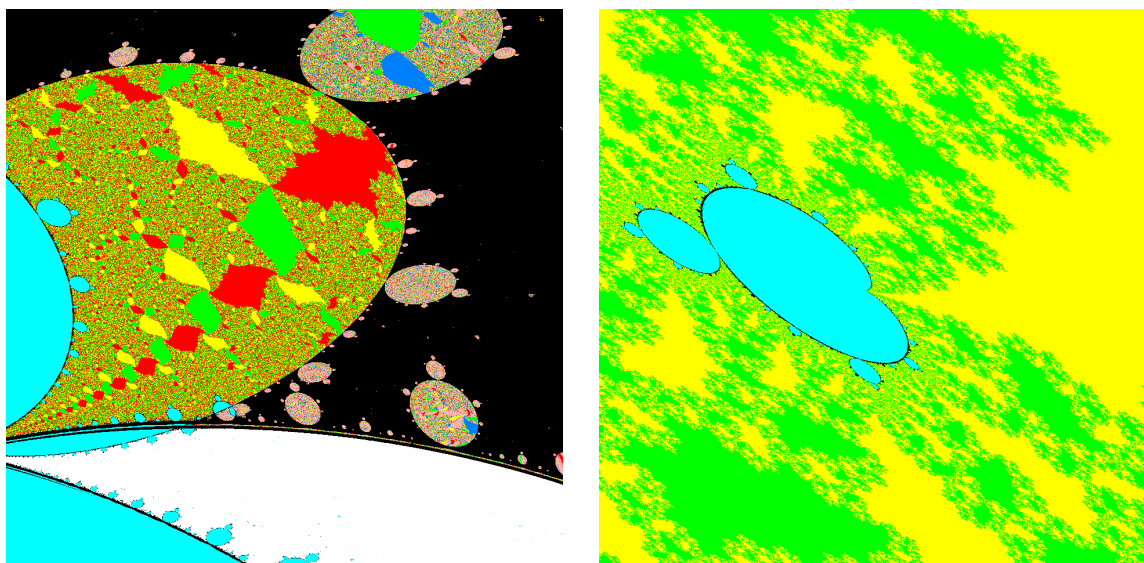
6. ábra. Az E, D és  $\{C,B\}$  típusú hiperbolikus halmazok elkülönítése numerikusan egyszerű, mert csak a két kritikus pont határ ciklusait kell megfigyelni. Tulajdonképpen a 4. ábrán is ez az osztályozás látható. Viszont a B és C típusok elkülönítéséhez a Fatou-halmaz bizonyos komponenseit kell elkülöníteni. A periodikus orbithoz való konvergencia fáziskülönbsége azonban numerikusan egyszerűen meghatározható, és segít az osztályozásban. Például a 0 fáziskülönbség csak C típusú komponens esetén lehetséges. A jobboldalihoz hasonló módszerrel készült más paraméterábrák találhatók itt: [27]

jutni valami miatt.

Hiába próbáltam az algoritmust optimalizálni, nem sikerült szépen kirajzolnom a jobb oldali határt a két fajta komponens között, sőt még egyéb helyeken is megjelentek zajos részek. Közben eszembe jutott, hogy ha teljes klasszifikációt nem is, de szükséges feltételt tudok adni a C típusú komponensek osztályozására. Az alap ötlet, hogy ha a két kritikus pont ugyanabban a fázisban éri el a vonzó periodikus orbit közvetlen vonzaskörzetét, akkor nem lehet B típusú, mert B típus esetén eleve fáziseltolásból indulnak a kritikus pontok. Ezt a fáziseltolást már lényegében ugyanolyan egyszerű volt számolni, mint a 4. ábra közös konvergencia tulajdonságát.

Másik előnye az 6b ábrán bevezetett jelölésnek, hogy az így kapott osztályozás fizikailag is jól interpretálható. Az E típusú dinamika esetén a rendszert bármelyik bázisállapotból indítva ugyanabba az állapotba fog konvergálni a rendszer. D típusú leképezés esetén különböző oszcilláló állapotokba tart a rendszer a két különböző bázisállapotból indítva. A  $\{B,C\}$  típusú dinamika esetén ugyanabba az oszcilláló állapotba jut el a rendszer de esetleg különböző fázisban.

Megmondható, hogy a hiperbolikus komponenseken belül ez a bizonyos fáziseltolás

(a)  $p : [0.05, 0.3] \times [0.55i, 0.8i]$ (b)  $p : [1.12, 1.18] \times [0.73i, 0.79i]$ 

7. ábra. Az 6b ábra két közeli nagyítása. A kritikus pontok konvergenciájának fáziseltolódásai fraktál szerű ábrát hoznak létre a Julia-halmazokhoz hasonló formavilággal. Ezen felül jól látszódnak a mindenfelé megjelenő kicsi Mandelbrot halmazokra emlékeztető szigetek.

állandó. A gondolatmenet nagy vonalakban a következő: maga a vonzó periodikus orbit, és annak nyújtása (deriváltja) folytonosan változik a paraméterekkel. Sőt a periodikus pontok egész, kicsi kontraktív környezetében is folytonosan változik a derivált. (Kontraktív környezet alatt a periodikus pont egy olyan kicsi  $\epsilon > 0$  sugarú környezetét értjük, amire megszorítva  $f^{\circ(\text{periódus hossz})}$  egy kontrakció, azaz Lipschitz konstansa kisebb mint 1.) Ezekbe a kicsi kontraktív környezetekbe egy idő után végérvényesen beleesnek a kritikus pontok iteráltjai, és innentől a fáziseltolás meghatározott lesz. Viszont a kritikus pontok egy kontraktív környezetéig tartó véges hosszú útja is folytonosan változik. Ebből arra következtethetünk, hogy az adott fáziseltolású leképezések nyílt halmazt alkotnak a paraméterterben. Ám a komponensek összefüggőek, tehát valóban az egész komponensen belül állandó a fáziseltolás.

Ennek a kis eszmefuttatásnak és a kiszámított ábrának meglepő tanulsága volt. Több komponens, amit egybefüggőnek gondoltam előtte, fraktálszerűen felhasadt sok-sok apró részre, l. 7. ábra. Ez a felhasadás leginkább a C típusú komponensekre volt jellemző, és ilyenkor az adott paraméterekhez tartozó Julia-halmazok hasonló mintázatokat mutattak a paraméterterben megjelenő komponensek határvonalaihoz. Erre később egy eléggé kézenfekvő magyarázatot is találtam, amit majd a következő szakaszban világítok meg, ahol is a valós paraméterek esetén tapasztalható dinamikát vizsgálom meg.

## 9. Szimmetriák és alkalmazásaik dinamikai vizsgálatokra

A szimmetriák segítségével sok hasznos tulajdonságát tudjuk levezetni a leképezéseknek, illetve a megfelelő Julia-halmazoknak. (Az  $f_p$  leképezéshez tartozó Julia-halmazt röviden csak  $J_p$ -vel fogjuk jelölni.)

Az  $f_p$  leképezést szemügyre véve az alábbi szimmetriákat olvashatjuk le:

- (a) Ellentett szimmetria:  $f_p(z) = f_p(-z) \Rightarrow J_p = -J_p$ .  
(A következtetésben felhasználtuk  $J_p$  teljes  $f_p$  invarianciáját.)
- (b) Konjugálás paraméterben és változóban egyszerre:  $f_{\bar{p}}(\bar{z}) = \overline{f_p(z)} \Rightarrow J_{\bar{p}} = \overline{J_p}$ .  
Másképp megfogalmazva  $f_p(z) = \overline{f_{\bar{p}}(\bar{z})} \Rightarrow f_p$  úgy hat  $\hat{C}$ -n mint  $f_{\bar{p}}$  hat  $\overline{\hat{C}}$ -n  $\Rightarrow J_p = \overline{J_{\bar{p}}}$ . Speciálisan, ha  $p \in \mathbb{R}$  akkor  $J_p = \overline{J_p}$ .
- (c)  $p$  tükrözése a képzetes tengelyre és invertálás  $z$ -ben:  $f_{-\bar{p}}(z) = 1/f_p(1/z) \Rightarrow J_{-\bar{p}} = 1/J_p$ . Speciálisan, ha  $p \in i \cdot \mathbb{R}$  akkor  $J_p = 1/J_p$ .

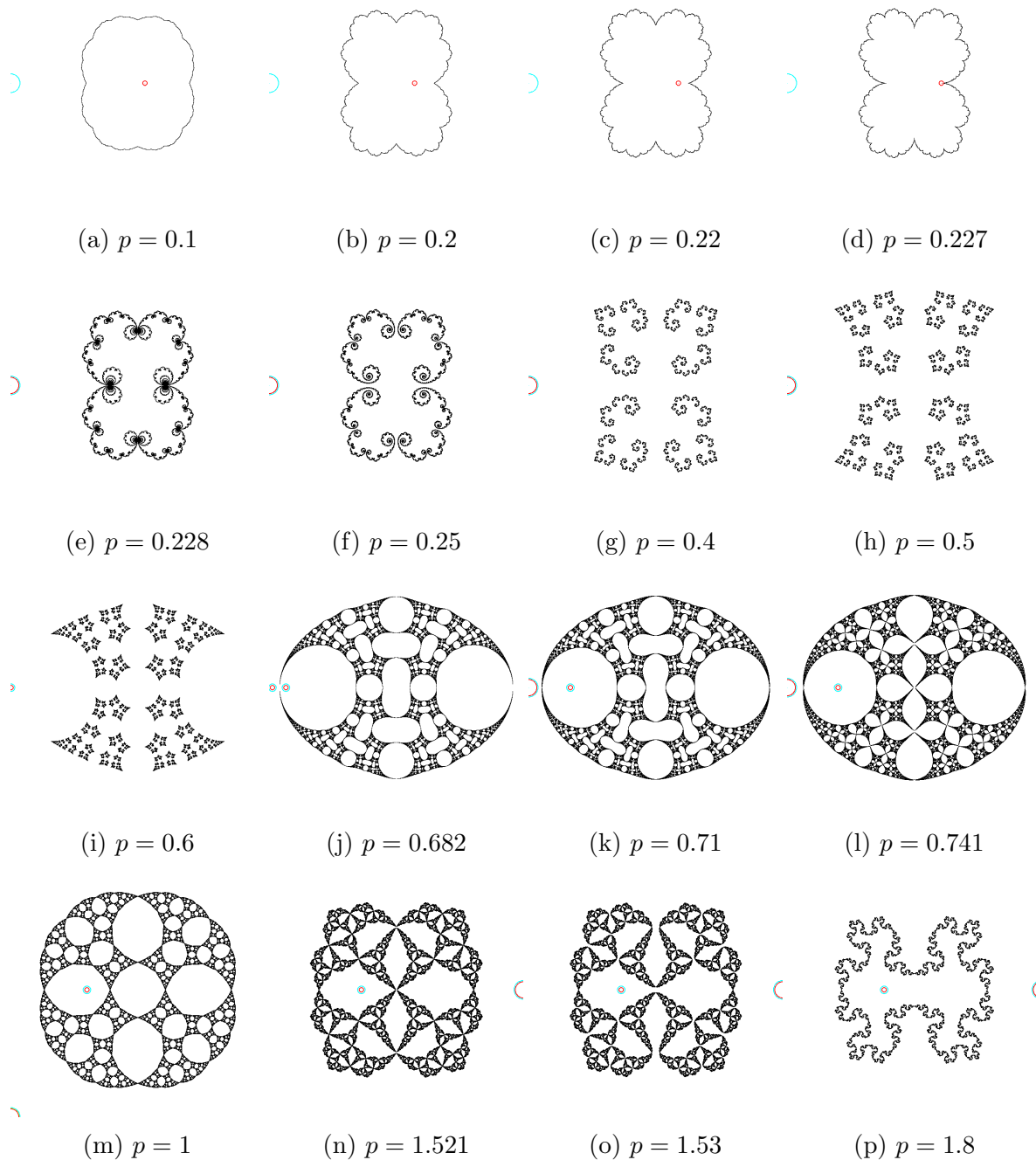
Van még két speciális eset, ami az eddig felsorolt összes szimmetriával rendelkezik, sőt még az  $i$ -vel való szorzás is szimmetriája:

- (1) Ha  $p = 1$  akkor  $f(iz) = 1/f(z)$ , és  $f(1/z) = -f(z)$  tehát  $f^{\circ 2}(1/z) = f^{\circ 2}(z)$  és  $f^{\circ 3}(iz) = f^{\circ 3}(z)$ , amiből megint csak  $J$  invarianciáját kihasználva  $J_1 = 1/J_1 = i \cdot J_1$ .
- (i) Ha  $p = i$  akkor  $f(iz) = -1/f(z)$ , az eddigi szimmetriákat és  $J$  invarianciáját kihasználva adódik, hogy  $J_i = i \cdot J_i$ . Továbbá  $f^{\circ 2}(\bar{z}) = \overline{f^{\circ 2}(z)} \Rightarrow J_i = \overline{J_i}$ .

A szimmetriák első alkalmazásaként megmutatom, hogy  $p \in i \cdot \mathbb{R}$  esetén nem kaphatunk  $\mathbb{C}$  típusú hiperbolikus dinamikát. Ehhez a leképezés illetve a Julia-halmaz  $1/z$  szimmetriáját használom ki. Az  $1/z$ -vel való konjugálás az  $f_p : p \in i \cdot \mathbb{R}$  leképezést mindig önmagába viszi, viszont felcseréli a két kritikus pontot a  $0$ -t és a  $\infty$ -t. Így ha a két kritikus pont ugyanahhoz a periodikus orbithoz tart (azaz  $f_p$  B vagy C típusú), akkor ez a periodikus orbit maga is invariáns kell hogy legyen. Közben az  $1/z$  leképezést a Julia-halmazt és így annak komplementerét a Fatou-halmazt is helyben hagyja. Ebből az következik, hogy ha az egyik kritikus pont nincs benne egyik periodikus pont közvetlen vonzáskörzetében sem, akkor a másik sem lehet. Viszont a C típusú hiperbolikus dinamika esetén az egyik kritikus pont mindenképpen benne van valamelyik periodikus pont közvetlen vonzáskörzetében, l. 8. Ez a megállapítás teljes összhangban van a numerikusan számított 6. ábrával.

### 9.1. $p \in \mathbb{R}$ hiperbolikus komponensei, és az őket elválasztó paraméter értékek magyarázata

Ebben az alponban azt a kérdést vizsgálom, hogy milyen dinamikát kapunk akkor, ha az  $U$  unitér transzformációnak egy  $\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$  forgásmátrixot választunk. A tárgyalásban és a számítások során szokás szerint a  $p$  paraméterrel fogok dolgozni. A forgásmátrixoknak éppen a valós  $p$  paraméterek fognak megfelelni, a forgatás szöge és a  $p$  paraméter közötti összefüggést pedig a  $p = \tan(x)$  azonosság adja.



8. ábra. Julia-halmazok és dinamika a valós egyenesen, a jelölés rendszer ugyanaz, mint az 5. ábrán. (a-h) esetén az ábrázolt tartomány  $[-2, 2] \times [-2i, 2i]$ , míg (i-p) esetén  $[-2.5, 2.5] \times [-2.5i, 2.5i]$

Visszatérve a szimmetriákhoz, ha  $p \in \mathbb{R}$ , akkor  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  is invariáns  $f_p$ -re, mert  $f_p$  összes együtthatója valós. Ezért aztán a leképezés iteráltjai, sőt annak deriváltjai is valósak lesznek. Ez kényelmessé teszi a kritikus pontok nyomon követését is, mivel elég a valós dinamikájukat vizsgálni. (Ez a fizikai rendszer szemszögéből nézve valami

olyasmit jelent, hogy a Hilbert térnek a  $|0\rangle, |1\rangle$  bázisvektorok által generált valós altere invariáns a leképezésre.)

A  $p = 0$  érték esetén a kritikus pontok egyben szuper vonzó fixpontok lesznek, tehát D típusú hiperbolikus dinamikát kapunk. A hiperbolicitás viszont nyílt tulajdonság a paraméterterben, tehát kicsi  $p$ -kre is mind a 0, mind a  $\infty$  egy-egy vonzó fixponthoz fog tartani. A leképezéseket vizsgálva kiderül, hogy ez egészen addig így is marad, amíg a fixpontok el nem romlanak. Ezt a feltételt a következő (valós) egyenletrendszerekbe tudjuk belesűríteni:

$$\left. \begin{array}{l} f_p(z) = z \\ f'_p(z) = 1 \end{array} \right\} p_{1,2} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{2\sqrt{3} - 3}, z_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{3} \mp \sqrt{2\sqrt{3}} \right) \left\{ \begin{array}{l} p_{1,2} \approx \pm 0.227083 \\ z_{1,2} \approx 1.37 \mp 0.93 \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} f_p(z) = z \\ f'_p(z) = -1 \end{array} \right\} p = \pm \sqrt{2\sqrt{3} - 3}, z = \frac{1}{2} \left( -1 - \sqrt{3} \mp \sqrt{2\sqrt{3}} \right) \left\{ \begin{array}{l} p \approx \pm 0.68125 \\ z \approx -1.37 \mp 0.93 \end{array} \right.$$

Az így kapott  $p$  értékek megegyeznek a paraméterábráinkon (pl. 6. ábra) található  $D \rightarrow E \rightarrow C$  típusú átmeneteknél látható nem hiperbolikus paramétereknek. Némi számolással és a szimmetriák alkalmazásával beláttam, hogy az egész  $|p| < \frac{1}{3} \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$  körlap a  $p = 0$  paraméter hiperbolikus komponensében van (lásd 9.2 alpont). A  $p = \frac{1}{3} \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$  eset különösen érdekes. Ebben az esetben is a korábbi fixponthoz fog tartani a 0, de ez a fixpont többé nem lesz vonzó, csak neutrális, hiszen a deriváltja éppen 1. Ilyen esetben parabolikus leképezésről, illetve Julia-halmazról beszélünk. A különlegessége ennek a paraméternek, hogy egy nagyon komoly fázisátalakuláson megy keresztül a Julia-halmaz ebben a pontban. Ezt a jelenséget úgy hívják, hogy parabolikus felrobbanás, (néha összeomlás) [20], hasonló jelenség figyelhető meg a Mandelbrot halmaz szélén a  $c = 1/4$  érték esetében.

$p \in \left( \frac{1}{3} \sqrt{2\sqrt{3} - 3}, \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \right)$  esetén a 0 és a végtelen ugyanahhoz a fixponthoz tart, és a Julia-halmaz folyamatosan átalakul.  $p = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$  eset megint érdekes, itt is egy parabolikus Julia-halmazzal van dolgunk, de itt nem tapasztalható a robbanásszerű átalakulás mint az előző esetben. Itt amellet, hogy az egyik fixpont neutrálissá válik megérkezik a két ellentétes imaginárius irányból a kettő hosszú ciklus, és egybeolvad ezzel a fixponttal. Kicsit nagyobb paraméterek esetén pedig megint csak szétválik a trió, de immár valós értéket vesznek fel. Középen a taszító fixpontot körbefogja a két vonzó periodikus pont. A 0 és a  $\infty$  pedig "átpártol" a vonzóvá váló kettő hosszú ciklushoz. Itt is van parabolikus robbanás, csak itt képzetes irányban haladva a paraméterterben tapasztaljuk. Képzetes irányban haladva itt jelenik meg a fekete tenger is, amelyik sok-sok nem hiperbolikus paramétert rejt magában.

Az a két átmenet, amelyet eddig tárgyaltunk mind valamelyik vonzó orbit parabolikussá válására volt visszavezethető. Az ilyen jellegű változások határa általában Mandelbrot halmaz szerű [17]. Ez magyarázza, hogy miért jelennek meg a paraméterterben mindenfelé kis "Mandelbrot emberkék".

A  $p > \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$  értékek esetén először C típusú Julia-halmazok jelennek meg. Aztán egy idő után átváltanak B típusúba. A váltás oka pedig, hogy a 0 egyszer csak

rápottyan a Julia-halmazra. Konkrétan egy instabil fixpontra esik rá 2 lépés alatt. Ezt a jelenség egy egyenletrendszerrel kifejezve, a  $p = 0, z = 0$  triviális megoldást leszámítva egy valós megoldást találunk:

$$\left. \begin{array}{l} f_p(z) = z \\ f_p^{\circ 2}(0) = z \end{array} \right\} \begin{array}{l} p = \sqrt[3]{1 + \sqrt[2]{26/27}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt[2]{26/27}} \approx 1.52138 \\ z = -p \end{array} \quad (10)$$

Ennél a  $p$  értéknél nagyobb értékekre mindig B típusú dinamikát tapasztaltam. Ezen felül még a C típusú komponensen belül is van egy váltás, ez esetben a 0 harmadik iteráltja révén pottyan rá az instabil fixpontra. Megint csak egy valós megoldás lesz, a  $p = 0, z = 0$  triviális megoldást leszámítva. Ez esetben azonban nem adható meg zárt gyökjeles alakkal a megoldás:

$$\left. \begin{array}{l} f_p(z) = z \\ f_p^{\circ 2}(0) = -z \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \approx 0.741356 \\ z \approx 2.17868 \end{array} \quad (11)$$

Ezeknek az átmeneteknek a megértése által magyarázatot találtam arra is, hogy a C típusú hiperbolikus komponensek esetén miért láttunk fraktálszerű határvonalakat a komponensek szélén. Ha ugyanis 0 nem olyan simán a valós tengelynél keresztezi a Julia-halmazt, ahol csak egy pont "vastagságú", hanem egy másik általános irányban, ahol bonyolultabb a fraktálszerkezet, akkor sokszor fogja a Julia-halmazt keresztezi. Ez pedig a hiperbolikus komponensek elaprózódásához vezet, hasonló struktúrában mint a Fatou-halmazok. Amikor a kritikus pont iterált képe a Julia-halmazt keresztezve az egyik Fatou-komponensből egy másikba jut a paraméter változtatása révén, akkor tipikusan a határ ciklushoz való érkezés fázisa is megváltozik, ezért lehet ezeket a változásokat jól ábrázolni a fázis eltolódás segítségével. Így tehát megtaláltam a Julia-halmazok és a C típusú hiperbolikus komponensek paraméterterbeli határvonalai hasonlóságának okát is, vö. 7a ↔ 5c; 7b ↔ 5d ábrák.

A paraméterter és a Julia-halmazok vizsgálata során úgy találtam, hogy ezzel sikerült teljesen osztályoznom a valós  $p$  paraméterekre megvalósuló dinamikát.

## 9.2. A $p = 0$ paraméter körül lévő hiperbolikus komponens

A következő gondolatmenet során azt vizsgáljuk, hogy milyen a dinamika akkor, amikor a választott  $U$  unitér transzformáció nincsen túl távol az identitástól, vagyis a  $p$  paraméter a 0 egy meghatározott környezetébe esik.

Az eredmény matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy  $p = 0$  paraméter körül fekvő, az első parabolikus paraméterig terjedő, nyílt körlapról sikerült precízen megmutatnom, hogy pontjai mind egy hiperbolikus komponensbe tartoznak. A bizonyítás lényege, hogy mutatok egy  $z = 0$  körüli a leképezésre nézve zsugorodó körlapot, és alkalmazom rá a Banach fixponttételt. Ezzel bebizonyítom, hogy a 0 kritikus pont egy vonzó fixponthoz tart. Mivel ezt megmutatom a nyílt körlap minden paraméter pontjára, ezért a szimmetria tulajdonságokból következni fog, hogy a másik kritikus pont is egy vonzó fixponthoz tart. Ez onnan látható, hogy 0 kritikus pont  $f_p$

szerinti viselkedése ugyanaz  $\infty$ -nek  $f_{-\bar{p}}$  szerinti viselkedése. A megfelelő orbitok között a megfeleltetést az  $1/z$  leképezés adja (ez a Möbius-transzformáció vonzó fixpontot vonzó fixpontba visz.). A  $p = 0$  körüli körlapot pedig a képzetes tengely mentén való tükrözés ( $p \leftrightarrow -\bar{p}$ ) önmagába viszi, ezzel kész a redukció.

Kiderült a próbálkozások során, hogy érdemes a  $p$  paraméter abszolút értékével arányos sugarú körlapot venni  $z = 0$  körül. Hogy a lehető legtöbb paraméterre működjön ez az eljárás az  $a$  arányszámot (9)-ben megjelenő  $z_1$  és  $p_1$  értékek hányadosának vettem:

$$a = \frac{z_1}{p_1} = \frac{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}} \right)}{\frac{1}{3} \sqrt{2\sqrt{3} - 3}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{72 + 42\sqrt{3}} - 3 \left( 1 + \sqrt{3} \right) \right) \approx 1.91745$$

Tehát arra az esetre koncentrálunk amikor  $|p| \leq p_1 (< 1/4)$  és  $|z| \leq a|p| (< 1/2)$ , ekkor például  $f_p(z)$  nevezőjének abszolút értékére  $|1 - \bar{p}z^2| \geq (1 - |p||z|^2) > 0$  teljesül. Továbbá a  $|z| = a|p|$  körvonalról megmutatható, hogy a  $|z| \leq a|p|$  körlapra képződik:

$$\begin{aligned} |f_p(z)| \leq a|p| &\iff |z^2 + p| \leq a|p||1 - \bar{p}z^2| \iff |z|^2 + |p| \leq a|p|(1 - |p||z|^2) \iff \\ &0 \leq -a^3|p|^4 - a^2|p|^2 + a|p| - |p| \iff |p| \leq p_1 \end{aligned}$$

(A  $-a^3x^4 - a^2x^2 + ax - x$  polinom valós gyökei épp  $0, p_1$ .) Mivel  $|p| \leq p_1$  és  $|z| \leq a|p|$  esetén  $f_p(z)$  nevezője sosem 0 ezért a  $|z| < a|p|$  nyílt körlapon  $f_p$  egy korlátos komplex analitikus függvény, ami ráadásul folytonos a körlap határán is. Így alkalmazható a maximum modulus elv, mely szerint  $\max_{|z| \leq a|p|} (|f_p(z)|) = \max_{|z|=a|p|} (|f_p(z)|)$ . Ezzel bizonyítottuk, hogy a  $|z| \leq a|p|$  körlap tényleg önmagára képződik  $f_p$  által  $|p| \leq p_1$  esetén.

Ahhoz hogy a Banach fixponttételt alkalmazhassuk még be kell bizonyítani, hogy a leképezés kontrakció. Ehhez elég bizonyítani, hogy a derivált kisebb mint 1 az egész  $|z| \leq a|p|$  körlapon. A maximum modulus elv miatt megint elég lesz csak a  $|z| = a|p|$  köríven ellenőrizni a feltételt. (4)-ban már kiszámoltuk a derivált értékét, most a  $|z| = a|p|$  köríven vett következő becsléshez fel is használjuk:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2z(1 + |p|^2)}{(1 - \bar{p} \cdot z^2)^2} \right| < 1 &\iff 2|z|(1 + |p|^2) < |1 - \bar{p} \cdot z^2|^2 \iff 2|z|(1 + |p|^2) < (1 - |p||z|^2)^2 \iff \\ &2a|p| + 2a|p|^3 + 2a^2|p|^3 - a^4|p|^6 < 1 \iff |p| < p_1 \end{aligned}$$

(A  $2ax + 2ax^3 + 2a^2x^3 - a^4x^6 - 1$  polinomnak megint 2 valós gyöke van  $p_1$  és 1.01108....)

Ezzel készen is vagyunk. Beláttuk, hogy  $|p| \leq p_1$  esetén a  $|z| \leq a|p|$  körlapot  $f_p$  önmagára képezi, és  $|p| < p_1$  esetén a derivált az egész (zárt) körlapon kisebb mint 1, tehát a leképezés kontrakció. Ezért alkalmazható a Banach fixponttétel. Így azt kapjuk, hogy egyetlen fixpontja van a leképezésnek, amelyik ráadásul vonzó, és a körlap minden pontja ide konvergál, beleértve a 0 kritikus pontot is. Ahogy már említettük szimmetria okokból hasonlóakat mondhatunk a másik kritikus pontról is. Ezzel tehát beláttuk hogy a paramétertér  $p = 0$  körüli  $p_1$  sugarú nyílt körlapja egyazon D típusú hiperbolikus komponenshez tartozik. Ennél nagyobb körlapra hasonló állítás nem teljesülhet hiszen a  $p = p_1$  paraméter már egy parabolikus leképezéshez tartozik.

Nagy paraméterek esetén hasonló trükkök alkalmazhatóak  $f$  kétszeres iteráltjára, de ott nem jönnek ki ilyen szépen a becslések. Az eredmény sokkal gyengébb volt, csak egy meglehetősen nagy korlát feletti  $|p|$  esetén garantálta, hogy az összes paraméter ugyanabba a B típusú komponensbe tartozzon.

### 9.3. A valós tengelyen megjelenő hiperbolikus komponensek központi paraméterei

Van még egy érdekes és szép tény, ami segít abban, hogy kicsit jobban áttekintsük a leképezéseket: a B, C és D típusba tartozó hiperbolikus komponensekhez mindig található pontosan egy központi paraméter [17], amihez tartozó leképezés *poszt kritikusan véges*, azaz a kritikus pontok iteráltjai előbb utóbb periodikussá válnak. Ezekhez a kitüntetett paraméterekhez tartozó Julia-halmazok általában szimmetrikusabbak mint a többi. Így a komponens többi leképezéséhez tartozó Julia-halmazra gondolhatunk úgy mint ezen központi Julia-halmaz eltorzított verzióira. Az egyetlen E típusú komponensben viszont nincs olyan paraméter, amelyhez tartozó leképezés *poszt kritikusan véges* lenne.

Megfontolható, hogy a komplex konjugálással való leképezés konjugálás:  $(\bar{z}) \circ f \circ (\bar{z})$   $M_2$  egy tükrözését valósítja meg a valós  $M_2$ -re nézve, és *poszt kritikusan véges* leképezéseket *poszt kritikusan véges* leképezésekbe visz. Ebből a szimmetriából az következik, hogy azoknak a hiperbolikus komponenseknek amelyeknek van pontja a valós  $M_2$ -ben szükségszerűen a középpontja is itt van.

A mi esetünkben egy kivétellel ezek a valós  $M_2$ -beli középpontok a mi valós tengelyünkre esnek. A D és B típusú komponensek középpontjai a  $p = 0$  és  $p = \infty$  paraméterek, amikor a  $z^2$  illetve  $-1/z^2$  leképezéseket kapjuk. A  $p = \infty$  eset ugyan szigorú értelemben nem része a paraméterterünknek, de mind fizikailag megvalósítható, mind a tágabb  $M_2$  térnek valódi eleme, csak a paraméterezésben korábban megtett  $x \rightarrow \tan(x)$  váltás miatt tűnik szinguláris paraméternek. Ez többek között azt is jelenti, hogy (10) kritikus  $p$ -je felett a megjelenő Julia-halmazok mind egyszerű zárt görbék, a körvonal folytonos deformáltjai!

A nagyobbik C típusú komponens középpontja a  $p = 1$  paraméter, az ehhez tartozó leképezést a szimmetriái miatt már korábban tárgyaltuk. Ez esetben a kritikus orbitok így alakulnak:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow \infty \leftrightarrow -1$ . Látható, hogy a két kritikus orbit azonos fázisban éri el a kettő hosszúságú határciklust. Tehát ez a leképezés egészen biztosan C típusú.

A másik C típusú komponenssel kapcsolatban megfontolható, hogy a *poszt kritikusan véges* esetben az egyik kritikus pontnak 3 iterálás után kell a másikra esnie. A leképezés ami ezt a feltételt teljesíti felírható a mi leképezésinkhez hasonló alakban:  $\frac{z^2+1/2}{-z^2+1}$ , azonban ezzel ekvivalens leképezés nem szerepel a mi paraméterterünkben.

## 10. A Julia-halmaz „sűrűsége” - a Hausdorff-dimenzió

A Julia-halmaz általában egy bonyolult fraktál alakzat. Különböző paraméterek esetén nem csak a Julia-halmaz alakja de a „sűrűsége” is változik – tipikusan a



hiperbolikus komponensek széle felé haladva növekszik a „sűrűség”. Az ábrázoláskor ez úgy csapódik le, hogy arányaiban több képpontba metszenek bele a Julia-halmazok, úgymond „vastagabb vonallal” kell kirajzolni őket. Ezt értelmezhetjük úgy, hogy az egész rendszerre nézve kiterjedtebb káosz jelenik meg. Ezt az intuitív „sűrűség” fogalmat matematikailag legjobban a fraktál dimenzió definíciója ragadja meg.

A dimenzió becslésére már mások is tettek kísérletet a mi leképezéscsaládunk esetén [26]. Emellett az általános elméletből is ismertek bizonyos tények, pl. hiperbolikus leképezések esetében a Hausdorff-dimenzió a 2-t nem érheti el [24]. Én is több módszert kidolgoztam a dimenzió becslésére. Az első módszer az egyszerű dobozdimenzió becslés, amit a programom automatikusan elvégez a Julia-halmazok képeinek kiszámítása közben.

$p = 0.9$		$p = 1$		$p = 1.1$		$p = 1.2$	
n	dimenzió	n	dimenzió	n	dimenzió	n	dimenzió
8	0	8	1.5238765	8	1.5728163	8	1.5809414
9	0.2273147	9	1.5610281	9	1.5724021	9	1.5827146
10	2	10	1.5684662	10	1.5724537	10	1.5826675
11	1.8439448	11	1.5658422	11	1.5724764	11	1.5828243
12	0	12	1.5653924	12	1.5724698	12	1.5829021
13	1.4265245	13	1.5655340	13	1.5724754	13	1.5829471
14	1.7028159	14	1.5655534	14	1.5724765	14	1.5829632
15	1.5825297	15	1.5655480	15	1.57247618	15	1.5829627
16	1.5267613	16	1.5655474	16	1.57247620	16	1.5829635
17	1.5623723	17	1.5655476	17	1.57247617	17	1.5829627
$\approx$	1.5...	$\approx$	1.56554...	$\approx$	1.572476...	$\approx$	1.58296...

1. táblázat. A dimenzió becslése a legfeljebb  $n$  periódusú pontokban vett deriváltak alapján. Alul a dimenzió értéke kiírva a konvergencia sebessége alapján empirikusan vélt pontosságig. Látható hogy a módszer a nagyobbik C típusú komponensben  $p = 0.9$  környékén kezd értelmes értékeket produkálni  $n = 17$  esetén. Utána gyorsan javul a helyzet,  $p = 1$ -ben már megbízható 5 tizedesjegyű becslést kapunk. A komponens (geometriai) közepe felé haladva a helyzet tovább javul.

Ez a módszer azonban lassan konvergáló becsléseket adott. A valós tengely mentén a 0 környékét leszámítva a becslések többnyire csak az első tizedesjegyig voltak megbízhatóak. Találtam azonban egy módszert, ami hiperbolikus Julia-halmazok esetén szuperexponenciálisan konvergáló becsléseket ad a Hausdorff-dimenzióra [23]. A számított becslések pontatlansága kvadratikus leképezések esetén legfeljebb  $a \cdot e^{-b \cdot n^{\frac{3}{2}}}$  lesz. Az  $n$  szám itt azt jelöli, hogy legfeljebb milyen hosszú periodikus orbitokat használunk a becslés elkészítéséhez. Ha figyelembe vesszük, hogy a legfeljebb  $n$  hosszú periodikus pontok száma  $N \approx 2^{n+1}$  akkor azt kapjuk, hogy a becslés során kiszámított pontok számának függvényében a konvergencia nem exponenciális de még mindig

szuperpolinomiális. Ez még mindig nagyon erős konvergencia, de a konkrét  $0 < a, b$  konstansok viszont nagyon erősen függenek az adott leképezéstől, ezért a gyakorlatban ez a módszer sem mindig célravezető, általában a hiperbolikus komponensek széle felé közeledve lassul le a konvergencia.

A módszer alapvetően a periodikus pontokban vett deriváltak alapján becsli a dimenziót. Ebben a fő nehézség a periodikus pontok kiszámítása. A [23]-ben közölt algoritmus a Mandelbrot halmazra volt kihegyezve. A program egy ügyes trükkkel a  $c = 0$  paraméternél megjelenő  $z^2$  leképezés triviálisan számolható periodikus pontjainak folytonos mozgását követi le a paraméterterben. Én úgy módosítottam a programot, hogy a mi paraméterterünkre is működjön az eljárás. De sajnos a mi változatos paraméterterünkben sok periodikus pont elveszik út közben. Úgy tudtam tovább javítani az algoritmust, hogy  $p = \infty$ -ben is kiszámoltam a periodikus pontokat, és azokat is elvittem a kívánt  $p$ -értékbe. Körülbelül  $n = 17$ -ig, azaz megközelítőleg  $2^{18}$  periodikus pontig sikerült veszteségmentesen megoldani a feladatot. Az ezzel a módszerrel kapott becslések láthatóak az 1-es táblázatban.

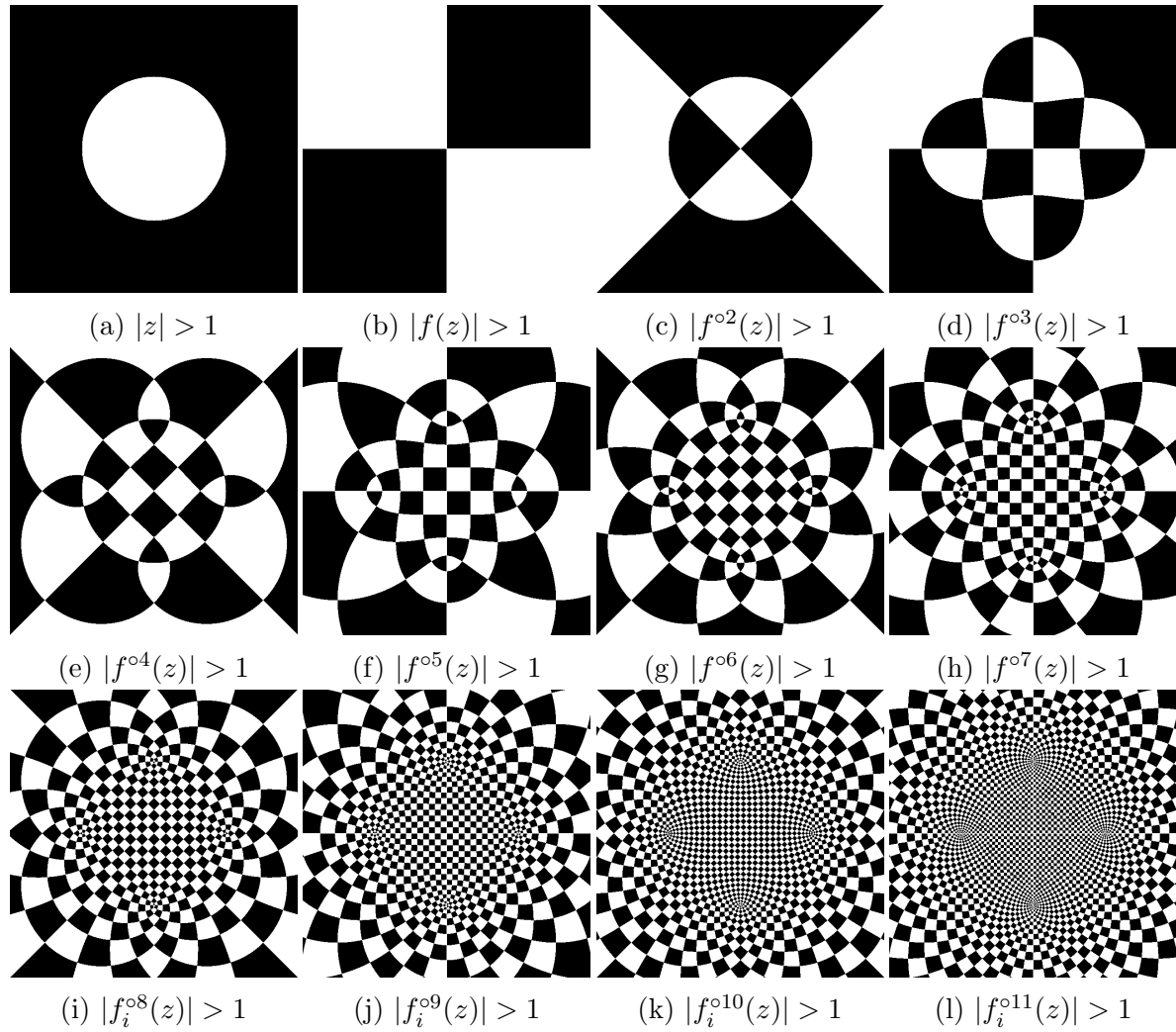
Szerencsére hiperbolikus Julia-halmazok esetében a dobozdimenzió és a Hausdorff-dimenzió megegyezik [25], ezért a kétfajta becslési módszer eredményeit jól össze lehet vetni, illetve esetleg lehet őket kombinálni. Remélhetőleg a módszerek finomításával el tudom érni, hogy a valós egyenesen egy megbízható dimenzió grafikon tudjak generálni. Még vannak más dimenzió becslési módszerek is, remélhetőleg a jövőben a meglévő módszerek ezen új eljárásokkal való ötvözése célra vezet majd.

## 11. Káosz a teljes állapottéren - a Riemann-gömb mint Julia-halmaz

A paraméterter nem hiperbolikus, középső „fekete tengerében” a legtöbb paraméterre úgy tűnt mintha a Julia-halmaz nagyon sűrű lenne, esetleg talán az egész Riemann-gömb. Ezekről a leképezésekről sokáig semmit nem tudtunk mondani. Távrolról sem olyan egyszerű a helyzet a paraméternek például a képzetes tengelyén mint a valós tengelyen volt. Viszont még mindig vannak szép szimmetriák amik talán segíthetnek a megértésben. A legszimmetrikusabb esetet kezdtem el a vizsgálni, nevezetesen amikor  $p = i$ , hátha a szimmetriák révén juthatok valahova.

A leképezéssel kísérletezve egyszer csak feltűnt, hogy az iteráltak mutatnak egyfajta 2-es periodicitást (lásd 9). A kapott ábrákból egyértelműnek tűnt, hogy a leképezés minden kezdő állapotra instabil, és hogy kell lennie valamilyen nagyon szép mögöttes struktúrának.

Ahogy elkezdtem matematikai eszközökkel tüzetesen vizsgálni a leképezést rájöttem, hogy a  $p = 1$  esethez hasonlóan ez is egy poszt kritikusan véges leképezés:  $0 \rightarrow i \rightarrow -1 \rightarrow 1 \leftarrow -1 \leftarrow -i \leftarrow \infty$  A különbség, hogy itt az 1 egy instabil fixpont. A szakirodalmat olvasgatva később arra is rájöttem, hogy ez igazából egy Lattès leképezés [21]. Az is kiderült, hogy ezek a Lattès leképezések fontos szerepet játszanak a kvadratikus racionális törtfüggvények körében, és mindössze 8 db [21] van



9. ábra. A  $p = i$  paraméterhez tartozó  $f_i$  leképezés iteráltjainak vizualizációja. Minden ábrán a  $[-2, 2] \times [-2i, 2i]$  tartomány szerepel aszerint színezve, hogy  $|f_i^{\circ n}| > 1$  (fekete) vagy  $\leq 1$  (fehér). Jól látható egyfajta periodicitás, minden 2 iterációs lépés után az egybefüggő azonos színű tartományok 2 fehér és 2 fekete tartományra bomlanak fel.

belőlük  $M_2$ -ben. Ebből 2 pedig a  $p = \pm i$  paramétereknek, avagy  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix}$  unitér kapu választásának felel meg!

A Lattès leképezések különlegessége, hogy a tórusz nyújtva forgatásaiból származnak. A komplex síkot lefaktorizálva egy rácsháló mentén tóruszt kapunk. A tóruszból úgy kapunk gömböt, hogy a tórusz ellentett pontjait megfeleltetjük egymásnak. (Az ellentettet most a komplex számsíkon vett reprezentáció segítségével értelmezzük.) A gömb alatt Riemann-gömböt értve, ezt a  $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{T} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$  összetett leképezést Weierstrass  $\wp$  függvénynek nevezik:

$$\wp(z, \omega, \varphi) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n^2+m^2 \neq 0} \left( \frac{1}{(z + m\omega + n\varphi)^2} - \frac{1}{(m\omega + n\varphi)^2} \right)$$

ebben a formulában  $(\omega, \varphi)$  a rács generátorai. A mi esetünkben az  $(1, i)$  lesznek a generátorok, vagyis a komplex számokat a Gauss egészekkel faktorizálva kapjuk majd a releváns tórusz felületet. A forgatás és nyújtás pedig az  $1 \pm i$ -vel való szorzás lesz. Mivel ez a leképezés a  $z$ -t és  $-z$ -t egymás ellentettjébe viszi ezért egy egyértelmű leképezést definiál a Riemann-gömbön is. Az indukált leképezés pedig nem más, mint  $\pm \frac{z^2+1}{2iz}$ .

Ezt a leképezést az  $\frac{z+1}{z-1}$  Möbius-transzformációval a kívánt alakúra hozhatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \circ \pm \frac{z^2+1}{2iz} \circ \frac{z+1}{z-1} &= \frac{z+1}{z-1} \circ \pm \frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + 1}{2i\frac{z+1}{z-1}} = \frac{z+1}{z-1} \circ \pm \frac{z^2+1}{i(z^2-1)} = \\ \pm \frac{\frac{z^2+1}{i(z^2-1)} + 1}{\pm \frac{z^2+1}{i(z^2-1)} - 1} &= \frac{(z^2+1) \pm i(z^2-1)}{(z^2+1) \mp i(z^2-1)} = \frac{(1 \pm i)z^2 + (1 \mp i)}{(1 \mp i)z^2 + (1 \pm i)} = \frac{z^2 \mp i}{\mp iz^2 + 1} = f_{\mp i}(z) \end{aligned}$$

A dolog külön szépsége, hogy a használt Möbius-transzformáció igazából egy izometria, tehát csak egy bázisáttérést hajtottunk végre, ha a Hilbert-tér nyelvén akarjuk megfogalmazni.

A tóruszal való kapcsolat megértése után már érthető, hogy miért olyan szabályosak és ismétlődő mintázatúak a 9. ábra képei. És már az is világos, sőt matematikailag is bizonyított[16, §7], hogy ebben az esetben a Julia-halmaz tényleg az egész Riemann-gömb lesz!

Ez fizikai szempontból nagyon jelentős eredmény. Eddig ugyanis csak egy 0 területű fraktálon tudtunk kaotikus dinamikát kimutatni, most pedig hirtelen az egész állapottéren valódi káosz jelent meg. A Julia-halmaz tulajdonságai miatt a következő nagyon erős állítás teljesül: Tegyük fel, hogy a rendszer kezdeti állapotát  $\epsilon$  pontatlansággal ismerjük. Ekkor bármely  $\epsilon > 0$  estén létezik olyan  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  korlát, hogy a folyamat  $N(\epsilon)$  iterálása után a rendszer állapotáról semmi biztosat nem tudunk mondani, a rendszer tetszőleges állapotba eljuthat a kezdeti bizonytalanság okán! A rendszer emellett közel van ahhoz, hogy explicite Ljapunov-instabil is legyen.

A tóruszon világos, hogy a rendszer Ljapunov-instabil, a tágulási konstans pedig  $|1+i| = \sqrt{2}$ , avagy a Ljapunov-exponens  $\ln(2)/2$ . Ha a tórusz metrikáját átörökítjük a gömbre, akkor a tágulási konstans értéke nem változik. Sajnos az átörökített metrikának lesz néhány pontban szingularitása, de ezek kezelhető azaz integrálható mértékűek lesznek. (Az így kapott metrikát orbifold metrikának hívják.)

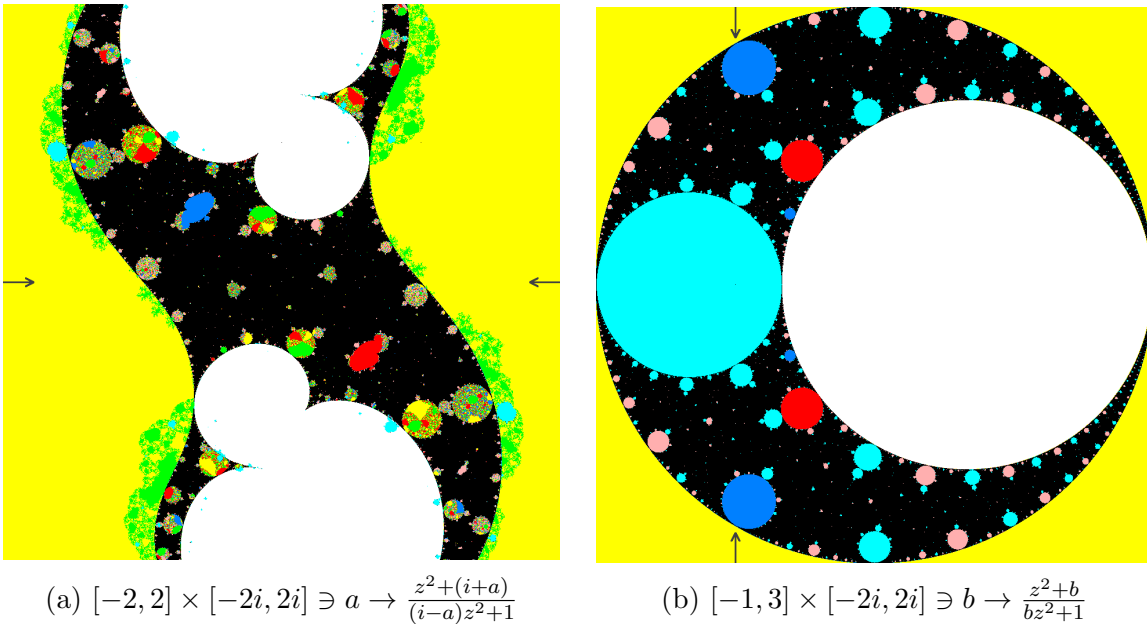
### 11.1. Teljesen kaotikus paraméterek $i$ közelében

Eddig 2 paraméterről sikerült megmutatni, hogy ennyire erősen kaotikus viselkedést mutat. De valószínűleg még ennél sokkal több ilyen „teljesen kaotikus” paraméter van a síkunkon, amikhez tartozó Julia-halmaz a teljes Riemann-gömb. Nyomós elméleti érvek szólnak amellet, hogy a „fekete tengernek” egy pozitív mértékű részhalmaza ilyen paramétereket fed le.

A komplex dinamikus rendszerek elméletének egy jelentős eredménye, hogy  $\text{Rat}_2$ -ben és  $\text{M}_2$ -ben is van olyan pozitív Lebesgue mértékű ponthalmaz, melyek ergodikus dinamikájú leképezéseket írnak le, azaz a Julia-halmaz a teljes Riemann-gömb. Sőt

bármely 1 komplex dimenziós analitikus részsokaság ami keresztül megy egy Lattès leképezéssel konjugált paraméter ponton, és egy egyszerű nemdegeneráltsági feltételnek eleget tesz, az tartalmaz egy pozitív mértékű ilyen ponthalmazt [22]. (Sőt a Lattès pont tetszőleges kicsi környezetébe eső részhalmaz is pozitív mértékű.) Viszont ez a tétel direktben sajnos nem alkalmazható a mi esetünkben, mivel a mi vágásunk nem tekinthető 1 dimenziós komplex részsokaságnak, csak 2 valós dimenziós részsokaságnak, mivel a  $p \rightarrow \frac{z^2+p}{-\bar{p}z^2+1}$  nem komplex differenciálható paraméterezés. Erről már korábban szóltunk a paraméterter elemzése során. Onnan látszik, hogy eredendően nem komplex differenciálható a paraméterezés, hogy  $p$  és  $\bar{p}$  egyszerre szerepel benne, ami egy tisztességes komplex függvénnyel alapvetően nem történhet meg.

Viszont vehetjük a  $(\varphi, c) \in ([0, 2\pi], \mathbb{C}) \mapsto \frac{z^2+i+e^{i\varphi}c}{(i-e^{-i\varphi}c)z^2+1}$  paraméterezését  $\text{Rat}_2$  egy három valós dimenziós részsokaságának. Fix  $\varphi$  esetén a  $c \rightarrow \frac{z^2+i+e^{i\varphi}c}{(i-e^{-i\varphi}c)z^2+1}$  leképezés már egy komplex egy dimenziós részsokaság analitikus paraméterezése lesz, ezért ezekre a részsokaságokra már alkalmazható a tétel. A kapcsolat a mi paramétercsaládunkkal, hogy az  $\text{Im}(c) = 0$  szelet épp a mi leképezéseinket adja vissza. Ezen általános paraméterezési séma szerinti két komplex egy dimenziós részsokaság látható a 10. ábrán. A  $\varphi = 0$  esetnek felel meg 10a, valamint a  $\varphi = \pi/2$  eset egy természetesebben paraméterezett verziója látható 10b-n.



10. ábra. A mi paraméterterünk (6b. ábra)  $p = i$ -be eltolt valós illetve képzetes tengelyének egy komplex dimenziós sokasággá kibővített verziói. Ezekben a részsokaságokban van egy pozitív mértékű halmaz, aminek pontjaihoz tartozó leképezések Julia-halmaza az egész Riemann-gömb. A mi paraméterterünkkel vett metszetek a nyilak segítségével vannak jelölve. A színek jelentése megegyezik az 6b ábrán használtakkal.

A nemdegeneráltsági feltétel azt írja elő, hogy a kritikus pontok véges orbitjai

váljanak szét a paraméter változtatásával. Vagyis esetünkben a kritikus pontok harmadik és negyedik iteráltjai ne essenek egybe. Precízen:

$$\left. \frac{\partial \left( f_{(\varphi,c)}^{\circ 4}(0) - f_{(\varphi,c)}^{\circ 3}(0) \right)}{\partial c} \right|_0 \neq 0; \quad \left. \frac{\partial \left( f_{(\varphi,c)}^{\circ 4}(\infty) - f_{(\varphi,c)}^{\circ 3}(\infty) \right)}{\partial c} \right|_0 \neq 0 \quad (12)$$

A  $\varphi = 0$  esetben (12) értéke mind a két kritikus pontra  $-4 + 4i$ , míg  $\varphi = \pi/2$  esetén mindkét kritikus pontra  $-4 - 8i$  a derivált értéke. Bevezetve az  $F_p = (f_p^{\circ 4}(0) - f_p^{\circ 3}(0))$  jelölést ez azt jelenti, hogy  $\left. \frac{\partial F_p}{\partial \operatorname{Re}(p)} \right|_i = -4 + 4i$ , illetve  $\left. \frac{\partial F_p}{\partial \operatorname{Im}(p)} \right|_i = -4 - 8i$ , avagy a teljes Jacobi mátrix a következő:

$$\left. \frac{\partial F_p}{\partial p} \right|_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F_p)}{\partial \operatorname{Re}(p)} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F_p)}{\partial \operatorname{Im}(p)} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F_p)}{\partial \operatorname{Re}(p)} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F_p)}{\partial \operatorname{Im}(p)} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Kihasználva, hogy fix  $\varphi$  esetén  $f_{(\varphi,c)}$  konform azaz komplex differenciálható leképezés  $c$ -ben, valamint hogy a mi paraméterterünkkel vett metszet az  $i$ -n keresztülmennő  $\tan(\varphi)$  meredekségű egyenes, a következő összefüggést kapjuk:

$$\left. \frac{\partial \left( f_{(\varphi,c)}^{\circ 4}(0) - f_{(\varphi,c)}^{\circ 3}(0) \right)}{\partial c} \right|_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^T \left. \frac{\partial F_p}{\partial p} \right|_i \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Mivel a (13)-ben kifejtett Jacobi mátrix nem szinguláris ezért (14) sosem lehet 0. Így a nemdegeneráltsági feltétel teljesül a 0 kritikus pontra bármely rögzített  $\varphi$  estén. Ugyanez a számolás érvényben marad a másik kritikus pontra, a  $\infty$ -re is, mert az elején kiszámolt két derivált értéke megegyezett.

Most már tehát biztosan állíthatjuk, hogy bármely rögzített  $\varphi$  esetén kapott részsokaságokban pozitív mértékű halmazzt alkotnak az ergodikus dinamikájú leképezések a  $c = 0$  paraméter tetszőleges kicsiny környezetében. A Fubini tétel alkalmazásával, és némi mértékelméleti megfontolás [22] után levonhatjuk a következtetést, hogy bármely  $\epsilon > 0$ -ra a  $[0, 2\pi] \times B(0, \epsilon)$  térrészben van egy a háromdimenziós Lebesgue mérték szerint pozitív mértékű részhalmaz, amely kizárólag ergodikus dinamikájú leképezéseket tartalmaz. Ezek után eléggé az intuíciónkkal ellentétes lenne, ha pont a mi szeletünkbe nem jutna elegendő a "teljesen kaotikus" paraméterekből.

## 12. A folyamat kísérleti megvalósításának lehetőségei

A kvantumszámítógépek elméletének[6] egy korai alapvető fontosságú eredménye, hogy bármely kvantum kapu hálózat (quantum circuit), avagy bármely qubiteken ható unitér operátor egzaktul helyettesíthető egy olyan kvantum kapu hálózattal amely csak egy qubites kapukat és *CNOT* kapukat tartalmaz [7, §4.5]. Az egy qubites kapuk megvalósítása általában egyszerűbb, mivel azok nem okoznak összefonódást. Továbbá

az is ismeretes, hogy bármely egy qubites unitér operátor tetszőleges pontossággal közelíthető a többnyire egyszerűen megvalósítható  $H$  és  $T$  operátorok megfelelően választott kompozícióval [7, §4.5].

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

Elméletei jelentősége és kísérleti nehézségei miatt a  $CNOT$  operátor kísérleti megvalósítása a kvantum számítógépekkel kapcsolatos egyik legtöbbet vizsgált problémává vált. A kérdés kiemelt fontossága miatt nagyon sokan foglalkoztak a  $CNOT$  operátor kísérleti megvalósításával. Ennek eredményeként mára számos különböző rendszerben demonstrálták a  $CNOT$  működését.

Mivel a mi iteratív protokollunk eleve csak egy qubites kapukat és  $CNOT$  kapukat tartalmaz, ezért számos fizikai rendszer kínálja magát kísérleti megvalósítás céljából. Számos rendszer van amelyikben minden szükséges elem kísérletileg is rendelkezésre áll a protokoll megvalósítására. A következőkben a teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány kísérleti szempontból ígéretes megvalósítási irányt.

A  $CNOT$  operátor első kísérleti demonstrációját 1995-ben végezték el a mára már Nobel-díjas David J. Wineland csoportjában [8]. Az általuk alkalmazott csapdázott ionokon alapuló kísérletek később bonyolult több qubites összefont rendszerek megvalósítására is alkalmasnak bizonyult, és a kvantum számítógépek megvalósításának egyik legígéretesebb irányvonalává vált [9]. Egy sokban rokon, másik ígéretes megvalósítási irány az úgynevezett cavity QED [10]. De sokat vizsgálták a kvantumszámítógép megvalósításának lehetőségét például NMR, kvantum pötty, stb. [11] rendszerekben is.

Sok szempontból érdekes alternatíva a lineáris optikán alapuló megvalósítási mód. A nyilvánvaló előnye ennek a módszernek, hogy nagyon egyszerű modulokból, nyalábosztókból, tükrökből és fázistoló optikai elemekből állítható össze a rendszer. Ennek a megvalósítási iránynak az erejét jól mutatják például a kvantum bolyongások kísérleti demonstrációja kapcsán elért sikerek [14, 15]. Nehézséget jelent viszont, hogy nem lineáris operációkat – mint amilyen a  $CNOT$  is – nem triviális megvalósítani. Erre ad választ a mérések révén effektív nemlinearitást bevezető KLM-protokoll [12, 13]. A fotonok viszonylag egyszerű előállíthatósága nagy ismétlésszámot tesz lehetővé ami a mi protokollunk szempontjából különösen is ígéretessé teszi ezt a megvalósítási irányt.

### 13. Általánosított protokoll tetszőleges kvadratikus racionális törtfüggvény által leírt dinamika megvalósítására

Az általánosítás lényege, hogy a  $CNOT$  kapu helyett egy általános  $U$  két qubites kaput alkalmazunk az azonosan preparált qubit párokra. Megmutatom, hogy az  $U$  – mérés – posztszelekció séma képes tetszőleges kvadratikus racionális törtfüggvény által leírt dinamika megvalósítására (lásd 6. szakasz).

Tegyük fel, hogy a qubitjeink  $|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  állapotban vannak. Ekkor a qubit párok szorzat állapota  $\alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \alpha\beta|10\rangle + \beta^2|11\rangle$  lesz. Nézzük, hogy mi történik egy általános két qubités unitér kapu hatására:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha\beta \\ \alpha\beta \\ \beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}\alpha^2 + (u_{12} + u_{13})\alpha\beta + u_{14}\beta^2 \\ u_{21}\alpha^2 + (u_{22} + u_{23})\alpha\beta + u_{24}\beta^2 \\ u_{31}\alpha^2 + (u_{32} + u_{33})\alpha\beta + u_{34}\beta^2 \\ u_{41}\alpha^2 + (u_{42} + u_{43})\alpha\beta + u_{44}\beta^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Most tegyük fel, hogy megmérjük az első qubitet és a második qubitet csak akkor tartjuk meg, ha 0-t mértünk az első qubiten. Ha az első qubiten a mérés eredménye 0, akkor a megtartott második qubit állapota  $|\psi_1\rangle = N' \cdot (u_{11}\alpha^2 + (u_{12} + u_{13})\alpha\beta + u_{14}\beta^2)|0\rangle + (u_{21}\alpha^2 + (u_{22} + u_{23})\alpha\beta + u_{24}\beta^2)|1\rangle$  lesz, ahol  $N'$  a mérési valószínűségtől függő normálási faktor. Tovább alakítva a  $|\psi_1\rangle$  állapotot és bevezetve az új  $N$  normálási faktort kapjuk a következő még szebb alakot:

$$N \cdot \left( \frac{u_{11}\alpha^2 + (u_{12} + u_{13})\alpha\beta + u_{14}\beta^2}{u_{21}\alpha^2 + (u_{22} + u_{23})\alpha\beta + u_{24}\beta^2} |0\rangle + |1\rangle \right) = N \cdot \left( \frac{u_{11} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + (u_{12} + u_{13})\frac{\alpha}{\beta} + u_{14}}{u_{21} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + (u_{22} + u_{23})\frac{\alpha}{\beta} + u_{24}} |0\rangle + |1\rangle \right)$$

A 2. szakaszban leírtakhoz hasonlóan bevezetve a  $z$  paramétert láthatjuk, hogy a megvalósuló leképezés a következő kvadratikus racionális törtfüggvénnyel írható le:

$$z \rightarrow \frac{u_{11}z^2 + (u_{12} + u_{13})z + u_{14}}{u_{21}z^2 + (u_{22} + u_{23})z + u_{24}} \quad (16)$$

Az első természetes kérdés, hogy előáll-e így minden kvadratikus racionális törtfüggvény, tekintetbe véve, hogy az  $u_1$ . és  $u_2$ . együtthatók egy unitér mátrix első két sorának együtthatói. Az unitér feltételt kifejezhetjük 3 egyenlet formájában:

$$\begin{aligned} u_{11}^*u_{11} + u_{12}^*u_{12} + u_{13}^*u_{13} + u_{14}^*u_{14} &= 1 \text{ (normáltság)} \\ u_{21}^*u_{21} + u_{22}^*u_{22} + u_{23}^*u_{23} + u_{24}^*u_{24} &= 1 \text{ (normáltság)} \\ u_{11}^*u_{21} + u_{12}^*u_{22} + u_{13}^*u_{23} + u_{14}^*u_{24} &= 0 \text{ (merőlegesség)} \end{aligned} \quad (17)$$

Másik bázisban kifejtve a fenti egyenleteket a következő ekvivalens alakot kapjuk:

$$\begin{aligned} u_{11}^*u_{11} + (u_{12} + u_{13})^* \cdot (u_{12} + u_{13})/2 + (u_{12} - u_{13})^* \cdot (u_{12} - u_{13})/2 + u_{14}^*u_{14} &= 1 \\ u_{21}^*u_{21} + (u_{22} + u_{23})^* \cdot (u_{22} + u_{23})/2 + (u_{22} - u_{23})^* \cdot (u_{22} - u_{23})/2 + u_{24}^*u_{24} &= 1 \\ u_{11}^*u_{21} + (u_{12} + u_{13})^* \cdot (u_{22} + u_{23})/2 + (u_{12} - u_{13})^* \cdot (u_{22} - u_{23})/2 + u_{14}^*u_{24} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Meg szeretnénk mutatni, hogy tetszőleges  $z \rightarrow \frac{az^2+bz+c}{dz^2+ez+f}$  kvadratikus racionális leképezés megvalósítható. A (16) képlettel összevetve ez formálisan annyit tesz, hogy  $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mellyel az

$$\begin{aligned} u_{11} &= \lambda a & (u_{12} + u_{13}) &= \lambda b & u_{14} &= \lambda c \\ u_{21} &= \lambda d & (u_{22} + u_{23}) &= \lambda e & u_{24} &= \lambda f \end{aligned} \quad (19)$$



egyenlőségek egyszerre teljesüljenek. Behelyettesítve a (18) egyenletekbe a (19) egyenlőségeket és bevezetve  $(u_{12} - u_{13}) = \lambda x$  és  $(u_{22} - u_{23}) = \lambda y$  változókat a következő új egyenlet rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} (\lambda a)^*(\lambda a) + (\lambda b)^*(\lambda b)/2 + (\lambda x)^*(\lambda x)/2 + (\lambda c)^*(\lambda c) &\equiv |\lambda|^2 \left( |a|^2 + \frac{|b|^2 + |x|^2}{2} + |c|^2 \right) = 1 \\ (\lambda d)^*(\lambda d) + (\lambda e)^*(\lambda e)/2 + (\lambda y)^*(\lambda y)/2 + (\lambda f)^*(\lambda f) &\equiv |\lambda|^2 \left( |d|^2 + \frac{|e|^2 + |y|^2}{2} + |f|^2 \right) = 1 \\ (\lambda a)^*(\lambda d) + (\lambda b)^*(\lambda f)/2 + (\lambda x)^*(\lambda y)/2 + (\lambda c)^*(\lambda f) &\equiv |\lambda|^2 \left( a^*d + \frac{b^*e + x^*y}{2} + c^*f \right) = 0 \end{aligned}$$

Mivel a 3. egyenletet leoszthatjuk  $|\lambda|^2 \neq 0$ -val az első két egyenlet is leegyszerűsödik egy közös egyenletté, meghatározva  $|\lambda| = 1/\sqrt{|a|^2 + \frac{|b|^2 + |x|^2}{2} + |c|^2}$  értékét, de meghagyva egy fázisszabadságot a  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  paraméterben. Mivel  $\frac{az^2+bz+c}{dz^2+ez+f}$  egy kvadratikus racionális törtfüggvény ezért az  $a, b, c$  együtthatók közül legalább az egyik nem 0, így biztosan nem osztunk 0-val. Az egyenletrendszerünk megoldatlan része még:

$$\left. \begin{aligned} |a|^2 + \frac{|b|^2 + |x|^2}{2} + |c|^2 &= |d|^2 + \frac{|e|^2 + |y|^2}{2} + |f|^2 \\ a^*d + \frac{b^*e + x^*y}{2} + c^*f &= 0 \end{aligned} \right\} \\ \Updownarrow \\ \left. \begin{aligned} A := 2|a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 - 2|d|^2 - |e|^2 - 2|f|^2 &= |y|^2 - |x|^2 \\ B := -2a^*d - b^*e - 2c^*f &= x^*y \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

A kapott (20) egyenletrendszert az újonnan bevezetett  $A$  és  $B$  konstansokra vonatkozó esetszétválasztással oldjuk meg.

$B = 0 \ A > 0$ : A megoldás  $x = 0$ ,  $|y| = \sqrt{A}$  és  $y$  választásában marad egy fázis szabadság.

$B = 0 \ A = 0$ : A megoldás  $x = 0$ ,  $y = 0$ , ebben az esetben nem marad további fázis szabadság.

$B = 0 \ A < 0$ : A megoldás  $|x| = \sqrt{-A}$ ,  $y = 0$  és  $x$  választásában marad egy fázis szabadság.

$B \neq 0$ : Ekkor (20) második egyenletéből adódóan  $y = B/x^*$ , és ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve az  $A = |B|^2/|x|^2 - |x|^2$  egyenletet kapjuk. A feltétel miatt  $|B|^2 > 0$ , amiből az következik, hogy az  $\mathbb{R}^+ \ni r \rightarrow |B|^2/r^2 - r^2$  függvény szigorúan monoton csökken a teljes  $\mathbb{R}^+$ -on. Valamint 0-ban vett határértéke  $\infty$  és  $\infty$ -ben vett határértéke  $-\infty$ , amiből az következik, hogy minden  $A \in \mathbb{R}$  értéket pontosan egyszer vesz fel. Vagyis az  $A = |B|^2/r^2 - r^2, r \in \mathbb{R}^+$  egyenletnek pontosan egy megoldása van, amit most jelöljünk  $r_A$ -val. Ezzel a jelöléssel könnyedén kifejezhető a (20) egyenletrendszer megoldása:  $|x| = r_A, y = B/x^*$ , és ismét egy fázisszabadságunk van  $x$  megválasztásában.

Az  $a, b, c, d, e, f, x, y$  és  $\lambda$  értékek ismeretében az  $u_1$ . és  $u_2$ . együtthatók egyértelműen meghatározhatóak, és mivel kielégítik a (17) egyenletrendszert, ezért van olyan  $U$  unitér mátrix, amelynek  $u_1$ . és  $u_2$ . az első sorai. Valójában  $\text{Span}(u_1, u_2)^\perp$  bármely ortonormált bázisát választva  $u_3$ . és  $u_4$ . vektornak egy unitér mátrixot kapunk.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy tetszőleges  $f : z \rightarrow \frac{az^2+bz+c}{dz^2+ez+f}$  kvadratikus racionális leképezés megvalósítható megfelelő két qubites  $U$  unitér mátrix (illetve kapu) választásával. Sőt  $f$  lényegében egyértelműen meghatározza az unitér mátrix első két sorát. A  $\lambda$  paraméterben maradó fázisszabadság azt fejezi ki, hogy az unitér mátrix első két sorát ugyanazzal az  $e^{i\varphi}$  fázis faktorral beszorozva az indukált kvadratikus leképezés nem változik, hiszen ez csak egy irreleváns globális fázisban módosítja a qubitek állapotát. Az imént definiált  $x$  illetve  $y$  változóknban maradó fázis szabadságot pedig a következő módon értelmezhetjük: Mivel a qubit párok kezdetben szorzat állapotban vannak, ezért a leképezés szempontjából a  $\text{Span}(u_{12} - u_{13}, u_{22} - u_{23})$  együtthető kombinációk által kifeszített altér irreleváns, így ennek a relatív fázisa szabadon megválasztható.

### 13.1. A sikeres 0 mérés valószínűsége

Ha az első qubiten mérési eredményként 0-t kapunk, akkor tehát sikeresen elvégeztük az iteráció egy lépését. De ahhoz, hogy a folyamat ténylegesen működjön, véges valószínűséggel 0-t kell kapnunk mérési eredményként. Azt a valószínűséget, hogy az első qubitet megmérve 0-t kapunk eredményül jelöljük  $p(0)$ -val. A legjobb az lenne, ha valamilyen alsó korlátot tudnánk adni erre a  $p(0)$  valószínűségre.

Első lépésként megmutatom, hogy tetszőleges (szorzat) állapotból indítva a leképezést  $p(0) \neq 0$ . A (15) képlet alapján  $|\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle : |\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  kiinduló állapotból  $U$  alkalmazása után az első qubiten a 0 mérésének valószínűsége:

$$p(0) = |u_{11}\alpha^2 + (u_{12} + u_{13})\alpha\beta + u_{14}\beta^2|^2 + |u_{21}\alpha^2 + (u_{22} + u_{23})\alpha\beta + u_{24}\beta^2|^2$$

Ha ez a valószínűség 0 akkor külön-külön  $u_{11}\alpha^2 + (u_{12} + u_{13})\alpha\beta + u_{14}\beta^2 = 0$  és  $u_{21}\alpha^2 + (u_{22} + u_{23})\alpha\beta + u_{24}\beta^2 = 0$  is teljesülne. Most tegyük fel, hogy  $\beta \neq 0$ , ekkor

$$\begin{aligned} \lambda az^2 + \lambda bz + \lambda c &\equiv u_{11} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + (u_{12} + u_{13})\frac{\alpha}{\beta} + u_{14} = 0 \\ \lambda dz^2 + \lambda ez + \lambda f &\equiv u_{21} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + (u_{22} + u_{23})\frac{\alpha}{\beta} + u_{24} = 0 \end{aligned}$$

is egyszerre teljesülne. De ez azt jelentené, hogy  $z$  egyszerre gyöke  $az^2 + bz + c$ -nek és  $dz^2 + ez + f$ -nek, ami nem lehetséges mert így  $\frac{az^2+bz+c}{dz^2+ez+f}$  elsőfokú racionális törtfüggvényé egyszerűsödne, mi pedig feltettük, hogy kvadratikus. Másként kifejezve ekkor  $\frac{az^2+bz+c}{dz^2+ez+f} \notin \text{Rat}_2$ , lásd (7) képlet. Hasonlóan ha  $\beta = 0$ , akkor  $|\alpha| = 1$  és így egyszerre kéne teljesülnie  $u_{11} = 0$ -nak és  $u_{21} = 0$ -nak, ami ismét azt jelentené, hogy  $\frac{az^2+bz+c}{dz^2+ez+f}$  nem kvadratikus.

Második lépésként fixáljunk le egy  $f = \frac{az^2+bz+c}{dz^2+ez+f}$  kvadratikus racionális törtfüggvényt. Megmutatom, hogy ekkor tetszőleges kezdeti állapot esetén  $p(0) > m_f$  valamilyen  $m_f > 0$   $f$ -től függő konstanssal. Vezessük be a  $p_{|\psi\rangle}(0)$  jelölést, ami alatt a  $p(0)$  valószínűséget értjük, feltéve hogy a 2 qubites rendszer kezdetben a  $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$  állapotban volt. Az érveléshez két dolgot kell csak észrevennünk, egyrészt fix  $f$  esetén a

$p_{|\psi\rangle}(0)$  valószínűség a  $|\psi\rangle$  állapotoknak folytonos függvénye, másrészt 1 qubit (normált) állapottere kompakt halmaz, így a  $p_{|\psi\rangle}(0)$  függvénynek van valamilyen  $m_f$  minimuma és ezt a minimum értéket fel is veszi valamilyen  $|\psi_0\rangle$  állapotra, azaz  $m_f = p_{|\psi_0\rangle}(0)$ . Viszont  $p_{|\psi\rangle}(0) \geq 0$  definíció szerint és az előző bekezdésben láttuk be, hogy  $p_{|\psi_0\rangle}(0) \neq 0$ , vagyis  $p_{|\psi\rangle}(0) \geq p_{|\psi_0\rangle}(0) = m_f > 0$ , amit bizonyítani szerettünk volna.

Sajnos  $m_f$  értéke tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, ahogy ezt a  $\frac{z^2+\varepsilon}{z^2}$ ,  $\varepsilon \ll 1$  függvény példája mutatja. Itt a fő problémát az okozza, hogy a nevező és a számláló gyökhelyei nagyon közel vannak egymáshoz. Ha az ilyen, közel elfajuló leképezésektől eltekintünk és kikötjük, hogy a kvadratikus racionális törtfüggvény nevezőjének és számlálójának gyökhelyei nem eshetnek túl közel egymáshoz, akkor már van esélyünk valamilyen globális alsó becslés levezetésére is.

Ezzel egy új szempontot találtunk, ami szintén azt mutatja, hogy a dolgozatban részletesen tárgyalt leképezés család kitüntetett figyelmet érdemel. A dolgozat bevezetőjében található (1) folyamatot szemügyre véve ugyanis látható, hogy a leképezés sikerének, vagyis a megfelelő qubit 0 mérési eredményének valószínűsége legalább  $1/2$ . (Bizonyítás: Az  $x := |\alpha^2|$  jelölés alkalmazásával és felhasználva, hogy  $|\alpha^2| + |\beta^2| = 1$  némi átalakítás révén  $|\alpha^2|^2 + |\beta^2|^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2(x-1/2)^2 + 1/2 \geq 1/2$  adódik.)

### 13.2. Magasabb fokú racionális törtfüggvények

Meggondolható, hogy ha azonosan preparált qubit párok helyett azonosan preparált qubit  $n$ -esekkel foglalkozunk, akkor a szorzat állapotban  $n$ -ed fokú tagok jelennek meg, pl.  $n = 3$  esetén

$$(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = \\ \alpha^3 |000\rangle + \alpha^2\beta (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) + \alpha\beta^2 (|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle) + \beta^3 |111\rangle$$

Ha az előzőekhez hasonlóan bevezetjük a  $z = \frac{\alpha}{\beta}$  jelölést, és egy normálási faktor kiemelése révén az állapotot úgy írjuk fel, hogy az  $n$  db 1-est tartalmazó  $n$  qubites bázisállapot  $|11\dots 1\rangle$  együtthatója 1 legyen, akkor az állapot felírásában megjelenik az összes  $z$  hatvány egészen az  $n$ -edikig. Maradva az előző példánál

$$N (z^3 \cdot |000\rangle + z^2 \cdot (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) + z \cdot (|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle) + 1 \cdot |111\rangle)$$

alakba írható át az állapot, ahol  $N(= \beta^3)$  szokás szerint a normálási faktort jelöli.

Ezt az alakot felhasználva és a szakaszban felvázolt gondolatmenetet követve úgy gondolom belátható, hogy egy jól választott  $n$  qubites  $U$  unitér kapu alkalmazása után az első  $n - 1$  qubitet megmérve és csak egy (vagy esetleg néhány) előre meghatározott mérési eredményt elfogadva tetszőleges  $n \geq 2$  fokú racionális törtfüggvény által leírt dinamika megvalósítható.

## 14. Összefoglalás

A dolgozatban komoly előrehaladást tettem a [2, 3, 4]-ben felvázolt fizikai folyamatban megjelenő káosz megértésével kapcsolatban:

Írtam egy összetett programot, aminek segítségével a cikk ábrái is készültek, és amely a leképezések hatékony vizsgálatát tette lehetővé. A program elérhető a honlapomon online és offline verzióban is [28].

Sikerült a [4]-ben szereplő 2 paraméterű unitér transzformáció helyett egy teljesen általános unitér transzformáció paraméter teréből kiszűrni a lényegesen különböző dinamikára vezető paramétereket.

Az így kapott leképezéseket sikerült elhelyezni a lényegesen különböző dinamikájú leképezéseket tartalmazó "atlaszban",  $M_2$ -ben.

Megtaláltam a Möbius-konjugálás ekvivalencia relációjának fizikai, Hilbert-térbeli jelentését az általunk használt Möbius-transzformációk esetén.

Sikerült megérteni a pozitív Ljapunov-exponens és a hiperbolicitás kapcsolatát. ([4]-ben pozitív Ljapunov-exponens létezését csak a triviális  $U = I$  eseten látták be.)

Bizonyos esetekben sikerült megbízható Hausdorff-dimenzió becsléseket adni. Különösen érdekes a  $p = 1$  avagy  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  eset. Ezt a leképezést más rendszerekkel kapcsolatban is vizsgálták [5], illetve [26]-ben kísérletet is tettek a dimenzió kiszámítására.

Továbbá sikerült bebizonyítani, hogy az  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix}$  unitér kapu használata esetén a fizikai rendszer nevezetes Lattès leképezéseket valósít meg, és így a leképezés a teljes Bloch-gömbön kaotikus dinamikát mutat. Ez nagyon fontos eredmény, mivel az előtte vizsgált rendszerek az állapottérnek csak egy 2-nél kisebb dimenziójú, tehát nullmértékű halmazán mutattak igazi kaotikus dinamikát. Itt azonban az állapottér egészén jelenik meg a valódi káosz, vagyis a rendszer viselkedésének teljes megjósolhatatlansága. Amellett is sikerült érvelni, hogy a paramétertér egy jelentős része ilyen, az egész gömbön kaotikus leképezésekre vezet.

Végül sikerült a protokoll kismértékű általánosítása révén megmutatnom, hogy tetszőleges kvadratikus racionális törtfüggvény által leírt dinamika megvalósítható a vizsgált fizikai rendszerben, továbbá javaslatot tettem magasabb fokú racionális törtfüggvények dinamikájának kvantumfizikai megvalósítására is.

## Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek Kiss Tamásnak, aki bevezetett ennek az izgalmas témának a gondolatvilágába, és aki mindig nyitott volt a felmerülő kérdések érdemi megvitatására.

Továbbá szeretném megköszönni dr. Frigyik Béla Andrásnak, a Pécsi Tudományegyetem Matematikai és Informatikai Intézete adjunktusának, hogy tüzetesen átolvasta a dolgozatomat és hasznos megjegyzéseivel, kérdéseivel segített a matematikai tartalmat világosabb és érthetőbb formába öltetni.

**Hivatkozások**

- [1] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum*, Niels Bohr Institute, Copenhagen (2012)
- [2] H. Bechmann-Pasquinucci, B. Huttner, N. Gisin, Nonlinear quantum state transformation of spin-1/2, *Phys. Lett. A* 242, pp 198-204 (1998)
- [3] G. Alber, A. Delgado, N. Gisin, and I. Jex, Efficient bipartite quantum state purification in arbitrary dimensional Hilbert spaces, *J. Phys. A* 34, 8821 (2001)
- [4] T. Kiss, I. Jex, G. Alber, and S. Vymětal, Complex chaos in the conditional dynamics of qubits, *Phys. Rev. A* 74, 040301R (2006); *Acta Phys. Hung. B* 26, 229 (2006)
- [5] T. Kiss, S. Vymetal, L.D. Toth, A. Gabris, I. Jex, and G. Alber, Measurement induced chaos with entangled states, *Phys. Rev. Lett.* 107, 100501 (2011)
- [6] 2014 Kvantumfizika Mafihe Téli Iskola - a programot és az előadások pdf fájljait lásd a honlapon: <http://tisk.mafihe.hu/2014-kvantumfizika-mafihe-teli-iskola/>
- [7] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press. (2000)
- [8] C. Monroe, D. Meekhof, B. King, W. Itano, D. Wineland: Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate, *Phys. Rev. Lett.* 75 (25): 4714-4717 (1995)
- [9] R. Blatt, D. Wineland: Entangled states of trapped atomic ions, *Nature* 453, 1008-1015 (2008)
- [10] C. Monroe: Quantum Information Processing with Atoms and Photons, *Nature* 416, 238-246 (2002)
- [11] T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe, J. L. O'Brien: Quantum computers, *Nature* 464, 45-53 (2010)
- [12] E. Knill, R. Laflamme, G. J. Milburn: A scheme for efficient quantum computation with linear optics, *Nature* 409, 46-52 (2001)
- [13] J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. G. White, T. C. Ralph, D. Branning: Demonstration of an all-optical quantum controlled-NOT gate, *Nature* 426, 264-267 (2003)
- [14] A. Schreiber, A. Gábris, P. P. Rohde, K. Laiho, M. Štefaňák, V. Potoček, C. Hamilton, I. Jex, C. Silberhorn: A 2D Quantum Walk Simulation of Two-Particle Dynamics, *Science* 336, 55 (2012)
- [15] A. Peruzzo, M. Lobino, J. C. F. Matthews, et al.: Quantum Walks of Correlated Photons, *Science* 329, 5998 (2010)
- [16] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press (2006)
- [17] J. Milnor, *Geometry and Dynamics of Quadratic Rational Maps*, *Experimental Mathematics*, Volume 2, Issue 1, (1993)
- [18] M. Braverman, M. Yampolsky, *Computability of Julia Sets*, Springer (2009)
- [19] M. Rees, Components of degree two hyperbolic rational maps, *Inventiones mathematicae*, Volume 100, Issue 1, pp 357-382 (1990)
- [20] Arnaud Chéritat, *Parabolic Implosion - A mini-course*
- [21] J. Milnor, On Lattès maps. In *Dynamics on the Riemann Sphere*, a Bodil Branner Festschrift, P. Hjorth and C. L. Petersen, editors, pages 9-43. Eur. Math. Soc. Zürich (2005)
- [22] M. Rees, Positive measure sets of ergodic rational maps, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 19, 383-407 (1986)
- [23] O. Jenkinson, and M. Pollicott, Calculating Hausdorff Dimension of Julia Sets and Kleinian Limit Sets, *American Journal of Mathematics*, Volume 124, No. 3, pp. 495-545 (2002)
- [24] H. Sumi, On Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic rational semigroups, *Kodai Math. J.*, Volume 21, Number 1, 10-28 (1998)
- [25] H. Sumi, M. Urbanski Measures and dimensions of Julia sets of semi-hyperbolic rational semigroups, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A.*, Vol 30, No. 1, 313-363 (2011)
- [26] Bi Feng, and Li Chuan-Feng, Fractals in Quantum Information Process, *Chinese Phys. Lett.* 30, 010306 (2013)
- [27] <http://math.jacobs-university.de/timorin/perk/perk.html>

- [28] Az általam írt Java program elérhető itt: (a .html végződést átírva .jar-ra akár le is tölthető a számítógépre) <http://www.cs.elte.hu/~pal/KFKI/KFKI.html>

## Függelék 1 - Saját kutatási feladat bemutatása, eredmények kiemelése

A témavezetőmtől azt a feladatot kaptam, hogy a [4] cikkben felvázolt és az 2. szakaszban kifejtett kvantumfizikai protokoll kapcsán felmerülő kérdéseket vizsgáljam.

Az első feladatomból az volt, hogy osztályozzam a leképezéseket, és megértem a szakirodalom alapján, hogy mely leképezések tekinthetők ekvivalensnek. Valamint, amennyiben indokolt a vizsgált leképezések körét szűkítsem le. Valamint, hogy próbáljam elhelyezni a fizikai rendszer által megvalósított dinamikus rendszereket a matematikusok által feltérképezett bővebb térben. Ezekre a kérdésekre részletes választ sikerült adnom, amit a 4.,5.,6. szakaszokban részletesen ki is fejtek.

Egy másik fontos feladatomból az volt, hogy megvizsgáljam a felmerülő rendszereket exponenciális Ljapunov-instabilitás szempontjából, ugyanis ez a kérdés eddig csak a legegyszerűbb esetben volt tisztázott, amikor extra unitér kapu nem szerepel a folyamat leírásában. Erre a kérdésre is sikerült pontos választ adnom azáltal, hogy a 7. szakaszban leírtak szerint sikeresen összekötöttem a pozitív Ljapunov-exponens fogalmát egy sokat vizsgált matematikai fogalommal a hiperbolicitással. Ezután a matematikai apparátust követve a 8. szakaszban bevezettem egy még finomabb osztályozást. A kibővült eszköztár segítségével a 9. szakaszban egész paramétertartományokról láttam be, hogy pozitív Ljapunov-exponensű leképezéseket takar. Külön siker, hogy a Banach-fixponttétel alkalmazásával az identitás kiterjedt környezetében lévő  $U$  unitér transzformációk alkalmazása esetén sikerült belátnom a pozitív Ljapunov-exponens megjelenését a 9.2 alpontban.

A harmadik nagy kérdés az volt, hogy tudunk-e valamit mondani arról, hogy mi történik dinamikai szempontból 2. ábra fektet tengerének leképezéseivel. A sejtés az volt, hogy itt sok esetben talán az egész Riemann-gömbre kiterjedő káosz jelenik meg. A probléma numerikus instabilitása miatt azonban nem volt világos, hogy erről lehet-e egyáltalán bármit állítani. Végül sok kísérletezés után sikerült találnom egy kitüntetett paramétert, a  $p = i$ -t, ami az  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix}$  unitér kapu választásának felel meg, hogy az indukált dinamika bizonyíthatóan kaotikus viselkedést eredményez tetszőleges kezdeti állapot esetén. A részleteket a 11. szakaszban mutatom be, és kísérletet teszek további hasonló paraméterek létezésének bizonyítására.

Egy másik felmerült kérdés volt, hogy tudunk-e valamit mondani a leképezések kapcsán megjelenő Julia-halmazok fraktál dimenziójáról. A kezdeti nehézségek ellenére sikerült egy hatékony módszert a 10. szakaszban leírtak szerint adaptálnom a mi esetünkre, azonban bizonyos régiókban ez a módszer sem nyújt eléggé pontos becsléseket. Néhány érdekes esetet ezzel a módszerrel is sikerült lefedni.

Végül sikerült a dolgozat elején vizsgált sémát a 13. szakaszban vázolt módon nagy mértékben általánosítani, ami sok új érdekes probléma felé nyitja meg az utat.

## **Függelék 2 - Nyilatkozat a szakdolgozataim és a TDK dolgozatom egymáshoz való viszonyáról**

A matematikus BSc-n a szakdolgozatom témavezetője Dr. Lovász László, az ELTE Matematikai Intézet egyetemi professzora volt. A téma egy matematikai összefüggéseket híven tükröző online enciklopédia és tudástár megvalósítása volt, és strukturális kérdéseinek elemzése volt. A szakdolgozat letölthető az ELTE honlapjáról a következő linken: [http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc\\_mat/2010/gilyen\\_andras\\_pal.pdf](http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mat/2010/gilyen_andras_pal.pdf)

A matematikus MSc szakdolgozatom címe „Quantum walk based search methods and algorithmic applications”, amit a 2013-14-es tanév tavaszi félévében adok le az ELTE-n. A témavezetőm Friedl Katalin, a BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék egyetemi docense.

A témája alapvetően algoritmikus, kvantum-számításelméleti módszerekkel tárgyalja a gráfokon való keresés témakörét. A kiindulási pontot Szegedy Márió 2004-es cikke jelenti: Quantum Speed-Up of Markov Chain Based Algorithms, Proceedings of the 45th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pages 32-41 (2004)

A szakdolgozatban az ebben a cikkben foglaltaknak a lehetséges általánosításait vesszük számba, illetve feldolgozzunk a témában azóta megjelent szorosán kapcsolódó cikkeket is.

Már a témájukból is látható, de ezennel külön nyilatkozom róla, hogy mind a BSc, mind az MSc szakdolgozatom tartalmilag diszjunkt a jelen TDK dolgozatomtól.