Számítástudomány gyakorlat

Szerda 08:00-09:30, gather.town
4. feladatsor

1.* Bizonyítsd be, hogy egy kétszalagos, egy szalagot csak olvasó, a másikon legfeljebb $o(\log\log n)$ tárt használó Turing-gép csak reguláris nyelvet tud felismerni.

Definíció: $L \in \mathsf{R}$ „recursive", vagyis az L nyelv rekurzív, ha létezik Turing-gép, ami minden inputon megáll és ha $w \in L$, akkor 1-et ad ki, ha pedig $w \notin L$, akkor 0-t.
Definíció: Egy f függvény rekurzív, ha létezik Turing-gép, amely minden inputon megáll és a w inputra az outputja $f(w)$.
Definíció: $L \in \mathsf{RE}$ „recursive enumerable", vagyis az L nyelv rekurzíve felsorolható, ha vagy $L = \emptyset$, vagy létezik f rekurzív függvény, hogy $L = Im(f)$.
Definíció: $L \in \mathsf{co\text{-}RE}$ „complement recursive enumerable", vagyis az L nyelv co-rekurzíve felsorolható, ha $\overline{L} \in \mathsf{RE}$, ahol $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$.
Állítás: $L \in \mathsf{RE}$ pontosan akkor, ha létezik Turing-gép, amely pontosan az L-beli szavakra áll meg. (Következmény: ha L rekurzív, akkor rekurzíve felsorolható is.)
Állítás: $L \in \mathsf{R} \Leftrightarrow L \in \mathsf{RE}$ és $L \in \mathsf{co\text{-}RE}$.

2. Legyenek L_1 és L_2 rekurzíve felsorolható nyelvek. Mutasd meg, hogy $L_1 \cup L_2$ és $L_1 \cap L_2$ is rekurzíve felsorolható.

3. Tegyük fel, hogy L rekurzív és $L' \subset L$. Mutasd meg, hogy L' akkor és csak akkor rekurzív, ha rekurzíve felsorolható és $L \setminus L'$ is rekurzíve felsorolható.

4. Ha L rekurzíve felsorolható, de nem rekurzív és $L' \subset L$, akkor lehet-e L'
a) rekurzív?
b) co-rekurzíve felsorolható, de nem rekurzív?

5. Mutasd meg, hogy rekurzíve felsorolható, de nem rekurzív nyelv létezéséből következik Gödel első nemteljességi tétele, miszerint van olyan állítás, mely se nem bizonyítható, se nem cáfolható (bármely, néhány egyszerű követelménynek eleget tevő, rendszerben).

Definíció: Dominó-probléma: Ki akarjuk parkettázni a síkot egy véges dominó-készlettel, mely tartalmaz egy *Start* elemet, amit muszáj felhasználnunk.

6.[HF] Eldönthető-e, hogy kiparkettázható-e a sík a készlettel, ha
a) a dominókat el szabad forgatni 180°-kal?
b) a dominókat el szabad forgatni a függőleges tengelyük körül?
(Azaz a függőleges tengelyre tükrözöttjük is a készletben van.)
c) a dominókat el szabad forgatni az *egyik* átlójuk körül?
(Azaz az átlóra tükrözöttjük is a készletben van.)

7.** Mutassuk meg, hogy van olyan (kötelezően felhasználandó *Start*-dominó NÉLKÜLI) dominókészlet, mellyel a sík kirakható, de nem rakható ki kétszeresen periodikusan (vagyis úgy, hogy alkalmas lineárisan független egész koordinátájú (p, q) és (r, s) vektorokra bármely (x, y) pontot ugyanolyan dominó fed le, mint az $(x + p, y + q)$ és $(x + r, y + s)$ pontot).

A kurzus honlapján (`http://gilyen.hu/teaching/Szamtud_2024.html`) elérhetőek a (javított) feladatsorok és az órával kapcsolatos egyéb tudnivalók. A házi- és csillagos feladatokat a következő gyakorlat előtt tudjátok beadni, illetve csillagos feladatokat egészen addig amíg azokat „le nem lőjük" előadáson vagy gyakorlaton.