Számítástudomány gyakorlat

Konzultáció 2. zh előtt

Mintafeladatsor: `https://domotorp.web.elte.hu/teaching/szamtud20/szamtudZH2.pdf`

- Innen a 2. és 4. feladat nem releváns, mi nem vettünk kommunikációs bonyolultságot.
- Az 5. feladat kicsit nehezebb, most arra nem tértünk ki (ez ilyen COVID-os zh volt, ennél könnyebb lesz idén).
- A többi feladatot megbeszéltük a konzultáción. Innen pár tanulság.

NP-beli nyelvek alternatív ekvivalens definíciója: $L \in \mathbf{NP}$ ha létezik polinomiális időben futó Turing gép T amire teljesül, hogy

- minden $w \in L$ szó esetén létezik poly($|w|$) hosszú tanú t, hogy T elfogadja a (w, t) párt
- minden $w \notin L$ szó esetén bármely t tanúra T nem fogadja el a (w, t) párt

NP-teljes annyit jelent, hogy **NP**-beli (általában könnyű látni) és **NP**-nehéz, vagyis hatékony megoldása révén minden más **NP**-beli nyelv is hatékonyan megoldhatóvá válik. Az **NP**-nehézséget visszavezetéssel szoktuk belátni egy már ismert **NP**-nehéz problémára (például előadáson volt, hogy SAT az **NP**-teljes). Ilyenkor van egy L nyelvünk amiről azt akarjuk belátni, hogy **NP**-nehéz, és általában keresünk egy hasonló ismert $L_{\text{nehéz}}$ **NP**-nehéz nyelvet, valamint egy $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ „előretoló” függvényt, amire $w \in L_{\text{nehéz}} \Leftrightarrow f(w) \in L$. Ekkor, ha f hatékonyan számolható, akkor nyilvánvaló, hogy L hatékony felismerése révén $L_{\text{nehéz}}$ elemeit is hatékonyan fel tudjuk ismerni: ez maga a visszavezetés. Figyelem a nehézség visszavezetéséhez „előretoló” függvény kell! Ebbe bele lehet zavarodni ha valaki nem figyel eléggé!

Gondoljátok végig, hogy mi a jó nyelv $L_{\text{nehéz}}$, és mi a jó előretoló függvény az 1,3,7 feladatokban! Most pár tipp a feladatok megoldásához, ha szeretnétek gyakorolni csak akkor olvassátok el ha megakadtok.

1) Visszavezetés a gráf 3 színezhetőségre. f: vegyünk fel a gráf mellé még pár független csúcsot.

3) Visszavezetés a SUBSET-SUM-ra. f: vegyük a számok listájába még be a $k+1$, $S-k+1$, $S+1$ számokat, ahol S az összes szám összege a SUBSET-SUM-ban és k a keresett részösszeg.

7) Visszavezetés Hamilton-kör problémára, pontosabban ennek egy variánsára, ahol olyan Hamilton kört keresünk ami tartalmaz egy előre megadott e élet. (Ez a variáns nyilván **NP**-nehéz, külön ellenőrizzétek!) Input $G = (V, E), e \in E$, amit f elképez G', H'-be ahol $G' = (V', E')$ és V' pedig $n-1$ új csúcs $v'_1, v'_2, ..., v'_{n-1}$ hozzávételével jön létre, ahol n az eredeti csúcsok száma. Lásd mellékelt fotó – sajnos a kék kréta inkább kékes fehér. Az új csúcsok és élek színesek, az eredeti élek fehérek. H' a kék színű élekből áll és e-ből ahol feltettük, hogy $e = (v_1, v_n)$.

Végül a 6. feladatot beszéltük meg, itt elég belátni, hogy $\mathbf{RP} = \mathbf{BPP}$. Ez pedig azért van mert ha $\mathbf{NP} = \mathbf{BPP}$, akkor **BPP**-ben tudunk hatékonyan tanúkat keresni is! Valóban ha $L \in \mathbf{NP}$ akkor a (w, t') párok L' nyelve is **NP**-beli ahol $(w, t') \in L'$ ha van olyan t polinomiális hosszú tanú ami t'-vel kezdődik és T elfogadja t-t tanúként a $w \in L$ szóhoz. t' méretét egyesével növesztve tudunk tehát tanút keresni L' segítségével L-beli szavakhoz. Ha találunk tanút, akkor elfogadjuk a szót, ha nem találunk akkor elutasítjuk. Így ha $w \notin L$ akkor sosem fogadjuk el w-t. Ügyesen választva az ismétlések számát viszont minden $w \in L$-re találunk majd nagy valószínűséggel tanút, ezért nagy (legalább 0.5) valószínűséggel elfogadjuk w-t